

RA

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
REKENAFDELING

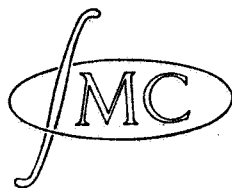
CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENEN B

Onderdeel: "Partiële differentiaalvergelijkingen"

door

Prof.dr. R. Timman

Deel IC



1963

RA

22. De warmtegeleidingsvergelijking of diffusievergelijking

Warmtegeleiding en diffusie worden in de fysica beheerst door dezelfde wet. Ruw gezegd: a. In een medium met plaatselijk verschillende temperaturen zal temperatuursnivellering optreden: door geleiding stroomt warmte van warmere naar koudere plaatsen.

b. Een hoeveelheid inkt, onregelmatig verdeeld in een bak met water, zal zich homogeen gaan verspreiden: door diffusie verplaatst zich inkt van plaatsen met hogere naar plaatsen met lagere concentratie.

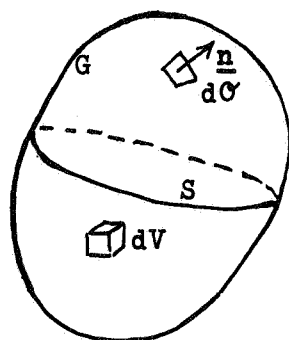
Uitgangspunt van de theorie is de zgn. wet van Fick. Beschouw oppervlak $\Delta\sigma$, normaalvector $\underline{n}$ op $\Delta\sigma$, warmtestroomvector $\underline{v}$ en tijdsinterval Δt .

De uitdrukking $\frac{\partial T}{\partial n}$ geeft aan de temperatuurtoename per cm in de richting van $\underline{n}$. Volgens de wet van Fick bedraagt dan het warmtetransport in Δt door $\Delta\sigma$:

$$\underline{v} \cdot \underline{n} \Delta\sigma \Delta t = -k \frac{\partial T}{\partial n} \Delta\sigma \Delta t \quad (22.1)$$

k is de warmtegeleidingscoëfficiënt. Het minteken geeft weer, dat de warmte stroomt in de richting van de temperatuursafname. Deze wet beantwoordt aan onze ruwe voorstelling: Hoe groter het temperatuurverval, hoe groter de warmtestroom. Bij het diffusieproces heet k de diffusiecoëfficiënt en is T de concentratie.

Uit (22.1) leiden we nu met behulp van de eerste stelling van Green (11.1) onze warmtegeleidingsvergelijking af.



Veronderstel $T = T(x, y, z, t)$ is de temperatuur in een gebied G van ons medium.

Randoppervlak S .

Het warmtetransport door S naar buiten bedraagt volgens (22.1) in tijdsinterval Δt

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma \Delta t = -k \iint_S \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma \Delta t. \quad (22.2)$$

Het gevolg hiervan is een temperatuursverandering ΔT . In formule:

$$\text{warmtetransport} = - \iiint_G c \rho dV \Delta T \quad (22.3)$$

met c : soortelijke warmte, ρ : soortelijke massa; minteken, omdat door warmtetransport buitenwaarts de temperatuur binnen daalt. Derhalve moet gelden

$$k \iint_S \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = \iiint_G c \rho \frac{\Delta T}{\Delta t} dV$$

na limiet-overgang

$$k \iint_S \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = \iiint_G c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (22.4)$$

Passen we op het linkerlid (11.1) toe

$$k \iiint_G \Delta T \, dV = \iiint_G c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV.$$

Deze formule moet voor elk gebied G in ons medium gelden. Dit is slechts mogelijk, wanneer de integranden overeenstemmen. Resulteert:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (22.5)$$

de zgn. warmtegeleidingsvergelijking, of diffusievergelijking. In de diffusievergelijking komen ρ en c voor als dimensieloze grootheden ter waarde 1.

We geven nog een aanschouwelijk afleiding: Laat G een blokje zijn met hoekpunten (x, y, z) , ..., $(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Warmtetransport in Δt door achtervlak naar binnen volgens Fick:

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dy \, dz \, \Delta t.$$

Idem door voorvlak naar binnen:

$$+k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dy \, dz \, \Delta t.$$

Samen

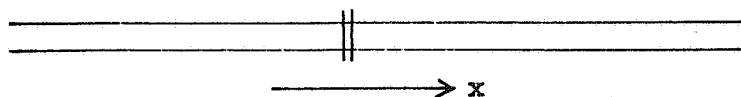
$$\begin{aligned} & \left(-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) dy \, dz \, \Delta t = \\ & = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV \, \Delta t. \end{aligned}$$

Samen met de bijdragen door de andere vlakjes krijgen we:

$$\text{Warmtetransport binnenwaarts} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV \, \Delta t.$$

Dit is weer gelijk aan $c\rho \, dV \, \Delta T$, waaruit (22.5) volgt.

Het ééndimensionale geval. Speciale oplossing.



fysische voorstelling: een staaf, zo dun, dat temperatuursverschillen binnen éénzelfde loodrechte doorsnede op elk moment verwaarloosbaar

zijn. Dus $T = T(x, t)$. We beschouwen dus de vergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (22.6)$$

Uit fysische dimensie-overwegingen volgt (vgl. PD-40)

$$\left[\frac{k}{\rho c}\right] = [\text{lengte}]^2 [\text{tijd}]^{-1}.$$

Dit laat zich met de definities der differentiaalquotienten rechtstreeks uit (22.6) afleiden, maar ook opbouwen uit de dimensies van k , ρ en c afzonderlijk. (Het verdient aanbeveling deze afleidingen zelf na te gaan.) Onze lengte- resp. tijdseenheid is x resp. t , dus

$$\frac{\rho c}{k} \cdot \frac{x^2}{t} \text{ is dimensieloos.}$$

Het komt vrij veel voor, dat een dimensieloze grootte een fysisch proces beheerst. Substitutie van zo'n grootte als nieuwe onafhankelijk variabele is dus acceptabel, en leidt dan tot zgn. gelijkvormige oplossingen. Noemen we $\frac{k}{\rho c} = a$ en substitueren we $\zeta = \frac{x^2}{at}$, dan gaat het nu om de omvorming van de vergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ met } T = T(x, t) \quad (22.7)$$

tot een vergelijking waarin $T = T(\zeta, t)$.

Voor het gemak schrijven we even de transformatie als volgt:

$\zeta = \frac{x^2}{at}$, $\tau = t$, en noteren later weer t in plaats van τ .

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{2x}{at} \frac{\partial T}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2}{at} \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \left(\frac{2x}{at}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{x^2}{at^2} \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Substitutie in (22.7) levert

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \left(-\frac{x^2}{at^2} + \frac{2}{t}\right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \frac{4x^2}{at} \frac{1}{t} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}$$

hetgeen dus overgaat in (schrijf weer t)

$$t \frac{\partial T}{\partial t} = (\zeta + 2) \frac{\partial T}{\partial \zeta} + 4\zeta \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \quad (22.8)$$

Opmerking. Het symbool $\frac{\partial T}{\partial t}$ in (22.7) en het symbool $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$ in (22.8) hebben verschillende betekenis! Het eerste correspondeert met differentiatie bij constante x , het tweede bij constante ζ .

Van (22.8) gaan we nu een speciale oplossing zoeken door separatie: Stel $T = f(t) \cdot g(\zeta)$, dan komt er

$$t \cdot f'(t) \cdot g(\zeta) = \{4\zeta g''(\zeta) + (2+\zeta) g'(\zeta)\} f(t)$$

of
$$t \frac{f'}{f} = \frac{1}{g} \{4\zeta g'' + (2+\zeta) g'\}.$$

Het linkerlid hangt niet van ζ af, het rechterlid niet van t , dus beide leden moeten constant zijn. Noem deze constante A .

Het eerste gedeelte $t \cdot \frac{f'}{f} = A$ geeft $\frac{f'}{f} = \frac{A}{t}$, $\log f(t) = A \log t$, dus

$$f(t) = t^A. \quad (22.9)$$

De algemene oplossing van het tweede gedeelte,

$$4\zeta g'' + (2+\zeta) g' - Ag = 0$$

is nogal gecompliceerd. Laten we daarom ook hier een speciale oplossing zoeken, namelijk een oplossing van de vorm

$$g(\zeta) = e^{\alpha\zeta}. \quad (22.10)$$

Dit resulteert in

$$\{4\alpha^2\zeta + (2+\zeta)\alpha - A\} e^{\alpha\zeta} = 0,$$

identiek in ζ , dus coëfficiënt van ζ en bekende term binnen de accolade moeten verdwijnen:

$$\left. \begin{array}{l} 4\alpha^2 + \alpha = 0 \\ 2\alpha - A = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \quad A_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \quad (22.11)$$

Met gebruikmaking van (22.9, 10, 11) hebben we dus als speciale oplossingen van (22.8) geconstrueerd

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = t^0 e^{0\zeta} = \text{constant, weinig interessant.} \\ T_2 = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\zeta}. \end{array} \right.$$

Een eenvoudige oplossing van de oorspronkelijke warmtegeleidingsvergelijking (22.7) is dus

$$T(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \quad (22.12)$$

Deze oplossing blijkt een eenvoudige fysische betekenis te hebben, die we het gemakkelijkst illustreren aan de diffusievergelijking (inktverdeling in een lange, overall even dunne, met water gevulde buis, $T(x,t)$ is de inktconcentratie ter plaatse x op tijdstip t).

Merk op dat

a) $T(0,t) \rightarrow \infty$ als $t \downarrow 0$, terwijl

b) $T(x,0) = 0$ voor $x \neq 0$.

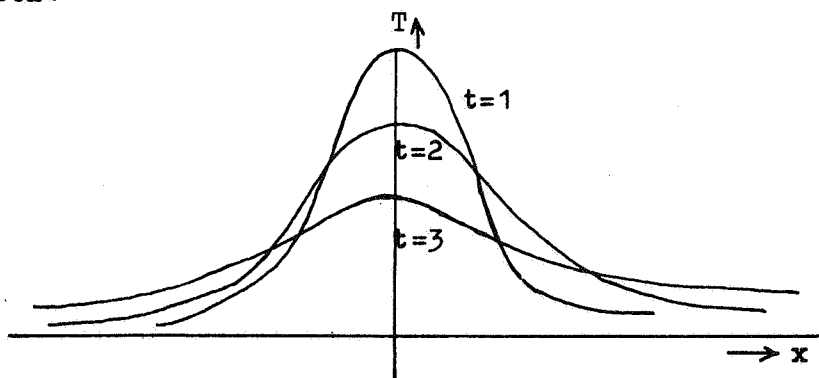
c) De totale hoeveelheid inkt in de (tweezijdig oneindig veronderstelde) buis op een vast tijdstip $t > 0$ (laat de doorsnede van de buis 1 cm^2 zijn) bedraagt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx = 2\sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 2\sqrt{a\pi}.$$

$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}$

Onze belangrijkste conclusie is, dat deze hoeveelheid onafhankelijk is van t . Samenvattend kunnen we zeggen, dat (22.12) weergeeft het concentratieverloop van een hoeveelheid inkt ter grootte $2\sqrt{a\pi}$, welke op het tijdstip $t = 0$ in het punt $x = 0$ van de dubbeloneindige buis wordt geplaatst, waarin nog geen inkt aanwezig was.

Grafisch:



We spreken hier in de warmtetheorie wel van de "warmtebron in de oorsprong".

Het meerdimensionale geval. Speciale oplossing.

In twee dimensies luidt de diffusievergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Zoeken we hier weer naar een oplossing, corresponderend met "de warmtebron in de oorsprong", dan ligt het voor de hand om poolcoördinaten (r, θ) te gebruiken. We krijgen dan (daar T niet van θ afhangt)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

met speciale oplossing $T = \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4at}}$.

In drie dimensies voeren we bolcoördinaten (r, β, φ) in (zie PD-35, 36), zodat de diffusievergelijking wordt voor de warmtebron in 0:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Hier is de speciale oplossing $T = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4at}}$.

Opgave: Leid deze formules af en toon aan, dat de in de hele ruimte aanwezige hoeveelheid warmte (materie) constant is.

Opmerking. We zien mathematisch dat de speciale oplossing, bijvoorbeeld in het eendimensionale geval, voor $t < 0$ niet reëel is. Fysisch is dit volkomen in overeenstemming met de werkelijkheid. Het "verleden" van een in 0 geplaatste druppel inkt is niet reëel in de buis.

Het ééndimensionale geval. Systematische algemene oplossing.

Beschouw weer de diffusievergelijking voor de dubbeloneindige buis met gegeven inktverdeling op het tijdstip $t = 0$. In formule

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (22.13)$$

met $U = U(x, t)$, waarbij $U(x, 0) = f(x)$ is gegeven. We nemen aan dat $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Een voor de hand liggende oplossingsmethode is Laplacetransformatie t.a.v. t (zie 17.6)

$$\mathcal{L}\{U(x, t)\} = u(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x, t) dt.$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = p u(x, p) - U(x, 0).$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Invullen in (22.13) na Laplacetransformatie levert

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p u(x, p) = -f(x). \quad (22.14)$$

De algemene oplossing van de met (22.14) corresponderende homogene vergelijking (rechterlid nul stellen) is

$$u = A(p) e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + B(p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}.$$

Om van de vergelijking (22.14) de oplossing te vinden passen we toe de methode van de variatie van constanten, d.w.z. de coëfficiënten $A(p)$ en $B(p)$ veronderstellen we ook van x afhankelijk. Stel dus

$$u = A(p, x) e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + B(p, x) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}. \quad (22.15)$$

Vooruitlopend op het vervolg merken we op, dat we op deze wijze een tweede orde D.V. met twee onbekende functies A en B krijgen, terwijl (22.14) slechts één onbekende functie u bevat. We mogen dus nog een extra voorwaarde opleggen.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{\frac{p}{a}} \{A e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - B e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}\} + \frac{\partial A}{\partial x} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + \frac{\partial B}{\partial x} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}.$$

De extra conditie die we nu stellen, is (identiek in p en x)

$$\frac{\partial A}{\partial x} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + \frac{\partial B}{\partial x} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} = 0. \quad (22.16)$$

Dan wordt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p}{a} \{A e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + B e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}\} + \sqrt{\frac{p}{a}} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - \frac{\partial B}{\partial x} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} \right\}$$

ingevuld in (22.14) komt er

$$\frac{\partial A}{\partial x} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - \frac{\partial B}{\partial x} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} = -\frac{1}{\sqrt{ap}} f(x). \quad (22.17)$$

Uit (22.16, 17) volgt na optellen, resp. aftrekken.

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{ap}} f(x) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} \\ \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{ap}} f(x) e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} \end{cases}$$

met als oplossingen:

$$\begin{cases} A(p, x) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_x^\infty f(\xi) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} d\xi + \alpha(p) \\ B(p, x) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_{-\infty}^x f(\xi) e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} d\xi + \beta(p) \end{cases} \quad (22.18)$$

Ons fysische probleem legt aan deze oplossingen nog zgn. natuurlijke randvoorwaarden op: Het is acceptabel te veronderstellen dat $U(x,t)$ voor $x \rightarrow \pm \infty$ begrensd is, en wel uniform in t . Anders gezegd $|U(x,t)| < M$ voor alle x en t , M vast. Dit impliceert door de definitie van $u(x,p)$, dat $|u(x,p)| < N$ voor $x \rightarrow \pm \infty$ (N vast), dus, dankzij de factoren $e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x}$ en $e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}$ in (22.15) vinden we als nodige voorwaarden, geldig voor alle voldoende grote p :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(p,x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} B(p,x) = 0.$$

Dit is slechts te realiseren, als $\alpha(p) = \beta(p) = 0$, omdat de beide integralen in (22.18) naar nul gaan door de voorwaarde $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

De enige in aanmerking komende oplossing van (22.14) is dus

$$u(x,p) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \left(\int_{-\infty}^x e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(\xi-x)} f(\xi) d\xi + \int_x^{\infty} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(x-\xi)} f(\xi) d\xi \right).$$

De twee integralen kunnen we nog samenvatten:

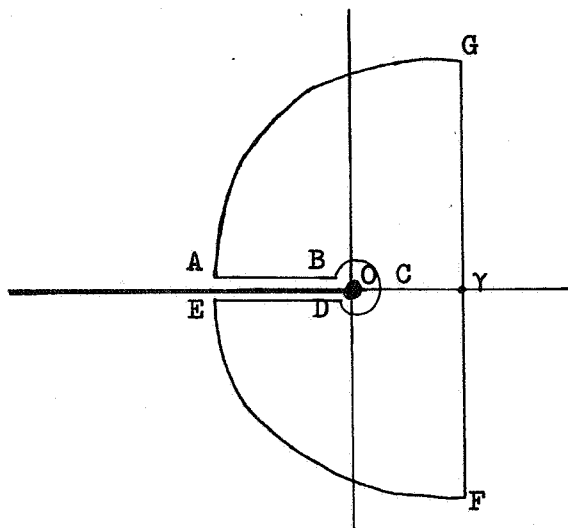
$$u(x,p) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|} f(\xi) d\xi. \quad (22.19)$$

Opmerking. De integrabiliteitsvoorwaarde voor $|f(x)|$ garandeert ons, dat de functie $u(x,p)$ uit (22.19) ook inderdaad bestaat.

Om $U(x,t)$ te vinden, transformeren we terug volgens de omkeerformule op blz. PD-150.

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} u(x,p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{p=\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|}}{2\sqrt{ap}} dp \end{aligned} \quad (22.20)$$

waarbij de integratierechte voor p alle singulariteiten van de bijbehorende integrand links laat liggen. Omdat er slechts één singulariteit, en wel $p = 0$ optreedt, die bovendien vertakkingspunt is, moeten we voorzichtig te werk gaan, brengen dus een snede aan langs de negatieve reële as, en beschouwen we de volgende contour ABCDEFGA in het p -vlak.



BCD is een δ -cirkeltje met middelpunt O , EF en GA twee kwartcirkels, straal R , middelpunt γ . Vervolgens $\delta \downarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.

De integraal over de hele contour is nul. (Geen singulariteiten er binnen.) We bekijken de stukken afzonderlijk.

a) Langs BCD is $p = \delta e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq -\pi$, dus

$$\int_{BCD} = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{\delta e^{i\theta}} - \sqrt{\frac{\delta}{a}} |x-\xi| e^{\frac{1}{2}i\theta}}{2\sqrt{a} \delta e^{\frac{1}{2}i\theta}} \cdot i\delta e^{i\theta} d\theta.$$

Voor $\delta \downarrow 0$ gaan alle voorkomende e -machten in absolute waarde naar 1, dus de orde van grootte van deze integraal is $\sqrt{\delta} \rightarrow 0$ als $\delta \downarrow 0$.

b) Langs GA geldt $p = \gamma + R e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

$\sqrt{\frac{p}{a}}$ ligt in het rechterhalfvlak, heeft een positief reëel deel, dus

$$\left| \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} |x-\xi|}}{2\sqrt{ap}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}(R-\gamma)} = O(R^{-\frac{1}{2}}) \quad (R \rightarrow \infty).$$

Een soortgelijke redenering laat zich houden voor EF. Volgens het lemma van Jordan (PD-152) gaan beide integralen dus naar nul voor $R \rightarrow \infty$.

c) Op AB hebben we $p = s e^{\pi i}$ (denk aan het argument boven de snede) waarbij $R-\gamma \geq s \geq \delta$. De integraal wordt

$$\int_{R-\gamma}^{\delta} \frac{e^{ste^{\pi i}} - \sqrt{\frac{s}{a}} |x-\xi| e^{\frac{1}{2}\pi i}}{2\sqrt{as} e^{\frac{1}{2}\pi i}} e^{\pi i} ds = - \int_{R-\gamma}^{\delta} e^{-st} \frac{e^{-i\sqrt{\frac{s}{a}} |x-\xi|}}{2i\sqrt{as}} ds.$$

d) Langs DE tenslotte is $p = s e^{-\pi i}$, $\delta \leq s \leq R-\gamma$. Nu wordt de integraal

$$\int_0^{R-\gamma} \frac{e^{ste^{-\pi i} - \sqrt{s/a} |x-\zeta|} e^{-\frac{1}{2}\pi i}}{2\sqrt{as} e^{-\frac{1}{2}\pi i}} e^{-\pi i} ds = - \int_0^{R-\gamma} e^{-st} \frac{e^{i\sqrt{s/a} |x-\zeta|}}{-2i\sqrt{as}} ds.$$

De onder c) en d) verkregen integralen nemen we samen. Resultaat

$$\int_{AB} + \int_{DE} = \frac{1}{i} \int_0^{R-\gamma} \frac{e^{-st}}{\sqrt{as}} \cos \sqrt{\frac{s}{a}} |x-\zeta| ds.$$

Nu $\delta \downarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, dan zien we, dat voor de integraal over p in (22.20) geldt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \dots dp &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{as}} \cos \sqrt{\frac{s}{a}} (x-\zeta) ds = (s = \rho^2) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-\rho^2 t} \cos \rho \frac{x-\zeta}{\sqrt{a}} d\rho. \end{aligned}$$

Noemen we $\frac{x-\zeta}{\sqrt{a}} = \beta$, dan gaat deze vorm over in (even integrand!)

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2 t} \cos \beta \rho d\rho = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\rho^2} \cdot e^{i\beta\rho} d\rho.$$

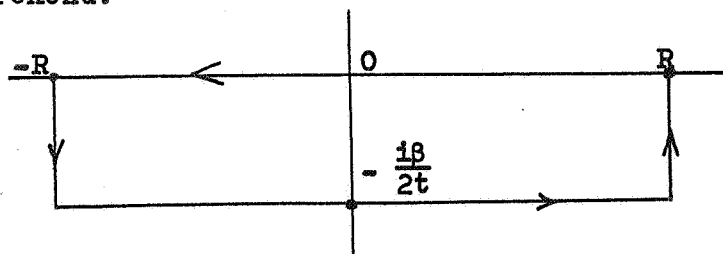
Dit is geoorloofd, omdat de sinusintegraal nul is (waarom?).

Substitueren we $\mu = \rho - \frac{i\beta}{2t}$. Hiermee verkrijgen we

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\frac{i\beta}{2t}-\infty}^{-\frac{i\beta}{2t}+\infty} e^{-t\mu^2 - \frac{\beta^2}{4t}} d\mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4at}} \int_{-\frac{i\beta}{2t}-\infty}^{-\frac{i\beta}{2t}+\infty} e^{-t\mu^2} d\mu.$$

(22.21)

We kunnen gemakkelijk inzien dat de laatste integraal (uitgestrekt over een horizontale lijn op hoogte $-\frac{i\beta}{2t}$) ook over de reële as mag worden berekend.



Immers, de integraal over de getekende rechthoekige weg is nul (geen singulariteiten van $e^{-t\mu^2}$ er binnen).

De lengte van de verticale stukjes is $\frac{\beta}{2t}$, de absolute waarde van de integrand bedraagt (als $0 \geq s \geq -\frac{\beta}{2t}$)

$$\left| e^{-t(\pm R + is)^2} \right| = e^{-tR^2 + ts^2} \leq e^{-tR^2 + \frac{\beta^2}{4t}}.$$

De integraal over de verticale stukjes samen is hoogstens

$$2 \cdot \frac{\beta}{2t} e^{-tR^2 + \frac{\beta^2}{4t}} \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Dus (22.21) gaat over in

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\mu^2} d\mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{at}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

De hierin optredende zgn. "foutenintegraal" hebben we reeds op PD-127 (midden) berekend en daarna herhaaldelijk ontmoet. Zijn waarde bedraagt $\sqrt{\pi}$, zodat we tenslotte als einduitkomst voor het oorspronkelijke diffusieprobleem (22.13) verkrijgen:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi. \quad (22.22)$$

Opm.1) Nu we de oplossing zien, en daarin de speciale oplossing (22.12) ook herkennen, blijkt er een evidente manier te zijn om (22.22) te voorspellen:

Het stuk $\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}$ gedraagt zich voor $t \downarrow 0$ als een

δ -functie met piek in $\xi = x$ (zie PD-200 en PD-136). Integreren we $f(\xi) \delta(\xi - x)$ van $-\infty$ tot $+\infty$ dan levert dat precies $f(x)$, dwz. in elk punt x wordt op volkomen natuurlijke wijze aan $U(x,0) = f(x)$ voldaan.

Opm.2) De integraal-limietverwisselingen, die aan opm.1 ten grondslag liggen, kunnen we ook mathematisch op strengere wijze rechtvaardigen. We zullen bewijzen dat in (22.22) $\lim_{t \downarrow 0} U(x,t) = f(x)$ voor elke vaste x .

Stel $\frac{\xi - x}{2\sqrt{at}} = \lambda$, dus $\xi = x + 2\lambda\sqrt{at}$. Dan is

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} f(x+2\lambda\sqrt{at}) d\lambda, \text{ dus}$$

$$U(x,t)-f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} [f(x+2\lambda\sqrt{at})-f(x)] d\lambda \quad (22.23)$$

Voor kleine $|\lambda|$ zal de haakfactor klein moeten worden, voor grote $|\lambda|$ moet de e-macht worden uitgebuit: Kies eerst R zo groot, dat

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) e^{-\lambda^2} \text{Max } |f(x)| d\lambda < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dit kan door de opgelegde eindigheidsvoorwaarde (PD-203 bovenaan) van U (en dus van f). Daar $|f(x+2\lambda\sqrt{at})-f(x)| \leq 2 \text{Max } |f(x)|$ is hiermee de integraal van (22.23) over de beide (oneindige) buitenste stukken kleiner dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ gemaakt. Voor het middenstuk ($-R \leq \lambda \leq R$) maken we gebruik van de continuïteit van $f(x)$. Door t klein genoeg te kiezen, kan op dit hele interval bereikt worden, dat $|f(x+2\lambda\sqrt{at})-f(x)| < \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{4R}$. Geïntegreerd ($e^{-\lambda^2} \leq 1$) wordt ook hier de totale bijdrage tot (22.23) kleiner dan

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{4R} \cdot 2R = \frac{1}{2}\varepsilon. \text{ Dus}$$

$$|U(x,t)-f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-R}^R \right| + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

als t klein genoeg wordt gekozen. Wat te bewijzen was.

Opm.3) De vergelijking (22.14) staat genoteerd als partiële d.v. met onafhankelijke variabelen x en p . We kunnen hem ook opvatten als gewone d.v. met onafhankelijke variabele x en parameter p . Bij alle optredende differentiaalquotienten (alleen u_{xx}) wordt immers p constant gehouden.

We gaan nu de oplossing van (22.13) nog op een derde manier afleiden (1. Laplace transformatie, 2. δ -karakter van de speciale oplossing) nl. 3. met Fouriertransformatie t.o.v. x .

We recapituleren ons probleem.

Gezocht een functie $U(x,t)$ zo dat

$$\begin{aligned} U_t &= a U_{xx} & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ U(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

$$\text{als } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

We definiëren nu (zie (17.20))

$$u(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U(x, t) dx \quad (22.24)$$

dan wordt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U_x dx &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dU = \\ &= U(x, t) e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U(x, t) dx. \end{aligned}$$

De eerste term van de laatste regel bestaat slechts, indien $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x, t) = 0$, omdat de factor $e^{i\alpha x}$ een niet-uitdempende golf is.

Deze limietvoorwaarde nemen we dus aan. Dan is

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U_x dx = -i\alpha u(\alpha, t).$$

Nemen we ook aan, dat $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{xx}(x, t) = 0$, dan is analoog

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U_{xx} dx = -\alpha^2 u(\alpha, t)$$

terwijl

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} U_t dx = u_t.$$

De door Fouriertransformatie uit de oorspronkelijke vergelijking voor U ontstane D.V. voor u is derhalve

$$u_t = -a \alpha^2 u. \quad (22.25)$$

$U(x, 0) = f(x)$ voert tot de volgende betrekking voor u :

$$u(\alpha, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx. \quad (22.26)$$

Ook hier kunnen we (vgl. opm.3 op PD-207) (22.25) opvatten als gewone D.V. met parameter α , dwz.

$$\frac{u_t}{u} = -a\alpha^2, \quad \log u = -a\alpha^2 t, \quad u = u(\alpha, 0) e^{-a\alpha^2 t}.$$

De Fouriergetransformeerde van U is m.a.w. (schrijf ξ als integratievariabele)

$$u(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t} \cdot e^{i\alpha \xi} f(\xi) d\xi.$$

Teruggetransformeerd volgens (17.22)

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} u(\alpha, t) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t - i\alpha(x-\xi)} d\alpha \quad (22.27) \end{aligned}$$

In de exponent van de e-macht splitsen we weer een kwadraat af:

$$-at \left(\alpha^2 + \frac{i(x-\xi)}{at} - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \right) - \frac{(x-\xi)^2}{4at}$$

zodat er komt

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} f(\xi) d\xi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at(\alpha + i\frac{x-\xi}{at})^2} d\alpha.$$

Analoog aan de berekening van (22.21) herleiden we de laatste integraal tot $\sqrt{\frac{\pi}{at}}$ waarmee wederom de oplossing

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} f(\xi) d\xi$$

wordt verkregen.

23. De funktie van Green

We beschouwen een gewone differentiaalvergelijking van het volgende type

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u = f(x). \quad (23.1)$$

$p(x)$, $q(x)$ en $f(x)$ zijn gegeven funkties, die we differentieerbaar onderstellen. Wanneer we nog meer voorwaarden nodig hebben, zullen we dit ter plaatse vaststellen. We zoeken nu $2 \times$ continu differentieerbare funkties $u(x)$ welke in een gegeven interval $[0, \ell]$ aan (23.1) voldoen en waaraan we nog zekere randvoorwaarden zullen opleggen, bijvoorbeeld $u(0) = A$, $u(\ell) = B$, of $u'(0) = C$, $u'(\ell) = D$ (de d.v. is van de tweede orde, dus we kunnen twee randcondities opleggen).

Voorbeeld 1

$p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $f(x) = 6x$ op het interval $[0, 1]$.
Randcondities: $u(0) = u(1) = 2$. Een elementaire berekening geeft $u'' = 6x$, $u = x^3 + \lambda x + \mu$ met $\mu = 2$, $\lambda = -1$, dus $u = x^3 - x + 2$.

Voorbeeld 2

$p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $f(x) = 2e^x$ op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$.
Randcondities: $u'(0) = u'(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Hier is de d.v. $u'' + u = 2e^x$
met algemene oplossing (elementair) $u = e^x + \lambda \cos x + \mu \sin x$.
Door de randvoorwaarden: $\mu = -1$, $\lambda = e^{\frac{1}{2}\pi}$.

Later zullen we ook het diffusieprobleem in dit verband bekijken.

Een vergelijking van de vorm (23.1) heet wel zelf-geadjungeerd. In een gediscretiseerde behandeling (differentieproces) geeft een dergelijk probleem aanleiding tot een symmetrische matrix.

Ter afkorting schrijven we verder voor het linkerlid van (23.1) het symbool Lu . De bedoeling is nu, om naar analogie van blz. PD-68 t/m 73 een funktie v , de zgn. Greense funktie, te ontwerpen, waaruit elke gewenste oplossing u van (23.1) op geschikte wijze is af te leiden. Het verschil met genoemde bladzijden zit hierin, dat we vroeger in dimensie 2 (en 3) de Greense funktie in een zeer speciaal geval beschouwden, en nu in dimensie 1 een algemener geval willen onderzoeken (de potentiaalvergelijking in één dimensie is triviaal).



Veronderstel nu a) $Lu = f(x)$ op $[0, \ell]$

b) $Lv = 0$ op $[0, \xi)$ en op $(\xi, \ell]$

v zal, behalve van x , ook nog van ξ afhangen. In het punt ξ behoeft Lv niet te bestaan. Wel veronderstellen we continuïteit van v in ξ . Over v' in ξ weten we nog niets. We maken de notatie afspraak, dat we met $v(x)$ steeds bedoelen $v(x, \xi)$.

Analoog met (12.16) werken we nu uit (met vermindering van het singuliere punt ξ) de vorm

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi-0} (vLu - uLv) dx &= \int_0^{\xi-0} \left\{ v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + vqu - u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) - uqv \right\} dx \\ &= \int_{x=0}^{\xi-0} \left(v d \left(p \frac{du}{dx} \right) - u d \left(p \frac{dv}{dx} \right) \right) = (\text{partiëel integreren}) \\ &= vpu' \Big|_0^{\xi-0} - \int_0^{\xi-0} pu'v' dx - upv' \Big|_0^{\xi-0} + \int_0^{\xi-0} pv'u' dx \\ &= vpu' - upv' \Big|_0^{\xi-0}. \end{aligned}$$

Door continuïteit van u , u' , v en p in ξ (gegeven) gaat deze vorm over in

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi-0} (vLu - uLv) dx &= v(\xi) p(\xi) u'(\xi) - u(\xi) p(\xi) v'(\xi^-) \\ &\quad - v(0) p(0) u'(0) + u(0) p(0) v'(0) \end{aligned}$$

$v'(\xi^-)$ is de linkerafgeleide van v in ξ .

Op dezelfde manier geldt

$$\begin{aligned} \int_{\xi+0}^{\ell} (vLu - uLv) dx &= v(\ell) p(\ell) u'(\ell) - u(\ell) p(\ell) v'(\ell) \\ &\quad - v(\xi) p(\xi) u'(\xi) + u(\xi) p(\xi) v'(\xi^+) \end{aligned}$$

waarbij $v'(\xi^+)$ de rechteraafgeleide van v in ξ voorstelt.

Samengesteld:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\xi-0} + \int_{\xi+0}^{\ell} \right) (vLu - uLv) dx &= \quad (23.2) \\ &= \{p(u'v - uv')\}(\ell) - \{p(u'v - uv')\}(0) + u(\xi)p(\xi)[v'(\xi^+) - v'(\xi^-)]. \end{aligned}$$

Anderzijds geldt op grond van de onderstellingen a) en b)

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\xi-0} + \int_{\xi+0}^{\ell} \right) (vLu - uLv) dx &= \\ &= \left(\int_0^{\xi-0} + \int_{\xi+0}^{\ell} \right) v f(x) dx = \int_0^{\ell} v(x, \xi) f(x) dx. \quad (23.3) \end{aligned}$$

(Daar v en f continu zijn merken we hier geen onregelmatigheden bij het punt ξ).

We zullen nu aan v nog een eis opleggen, nl.

$$v'(\xi^+) - v'(\xi^-) = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (23.4)$$

(Hiervoor moeten we dus veronderstellen, dat $p(\xi)$ nergens op het interval $[0, \ell]$ nul is.)

Combinatie van (23.2, 3, 4) levert nu

$$u(\xi) = \{p(u'v - v'u)\}(\ell) - \{p(u'v - v'u)\}(0) - \int_0^\ell v(x, \xi) f(x) dx. \quad (23.5)$$

Deze centrale formule zullen we nader bekijken en specialiseren op diverse types van randvoorwaarden. Memoreren we eerst de condities voor de functie $v(x, \xi)$, waaronder (23.5) geldig is. Deze zijn

- (1) v voldoet voor $x \neq \xi$ aan $Lv = 0$
 - (2) v is continu in $x = \xi$
 - (3) v' vertoont een sprong in $x = \xi$ ter grootte $-\frac{1}{p(\xi)}$
- $$v'(\xi^+) - v'(\xi^-) = -\frac{1}{p(\xi)}.$$

Door deze voorwaarden is v nog niet vastgelegd. We kunnen namelijk nog twee condities opleggen. Alvorens we hiertoe overgaan, merken we op, dat $u(\xi)$, wanneer $v(x, \xi)$ eenmaal doeltreffend is gefixeerd, uit (23.5) rechtstreeks is te bepalen.

Type A: Randcondities voor u : $u(0) = A$, $u(\ell) = B$.

Deze voorwaarden betreffen twee termen van (23.5). We zorgen dat de twee andere termen wegvallen door te eisen van v , behalve (1) (2) en (3) ook nog

$$(4A) \quad v(0) = v(\ell) = 0.$$

Dan wordt (23.5)

$$u(\xi) = -p(\ell) v'(\ell)B + p(0) v'(0)A - \int_0^\ell v(x, \xi) f(x) dx. \quad (23.5A)$$

Voorbeeld 1 (zie voorbeeld 1 aan het begin van 23)

We bepalen de Greense functie

$$Lv = 0 \text{ levert } \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \text{ dus}$$

$$v = \begin{cases} \alpha x & (0 \leq x < \xi) \\ \beta(x-1) & (\xi < x \leq 1) \end{cases} \quad (\text{volgens (1), (4A)}).$$

De continuïteit van v in ξ (2) geeft:

$$\alpha\xi = \beta(\xi-1) \rightarrow \alpha = \rho(\xi-1), \quad \beta = \rho\xi.$$

Nu nog de afgeleidensprong: (3)

$$v'(\xi^+) - v'(\xi^-) = \rho \xi - \rho(\xi-1) = \rho = -1, \text{ want } p(\xi) = 1.$$

Ergo

$$v(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & (0 \leq x \leq \xi) \\ \xi(1-x) & (\xi \leq x \leq 1) \end{cases}.$$

We bepalen $v'(1) = -\xi$, $v'(0) = 1-\xi$.

Er was gegeven $u(0) = u(1) = 2$, dus volgens (23.5A)

$$\begin{aligned} u(\xi) &= 2\xi + 2(1-\xi) - \int_0^1 v(x, \xi) \cdot 6x \, dx = \\ &= 2 - \int_0^\xi 6x^2(1-\xi) \, dx - \int_\xi^1 6x(1-x)\xi \, dx = \\ &= 2 + (\xi-1) 2x^3 \Big|_0^\xi - \xi(3x^2 - 2x^3) \Big|_\xi^1 = \\ &= 2 + 2\xi^4 - 2\xi^3 - \xi + 3\xi^3 - 2\xi^4 = \\ &= \xi^3 - \xi + 2. \end{aligned}$$

Een heel gerekend voor zo'n eenvoudig vraagstuk, maar de methode werkt ook in ingewikkelder problemen.

Type B: Randcondities voor u : $u'(0) = C$, $u'(\ell) = D$.

Nu zorgen we, dat behalve (1) (2) en (3) ook

$$(4B) \quad v'(0) = v'(\ell) = 0.$$

Dan gaat (23.5) over in

$$u(\xi) = p(\ell) v(\ell) \cdot D - p(0) v(0) \cdot C - \int_0^\ell v(x, \xi) f(x) \, dx. \quad (23.5B)$$

Voorbeeld 2 (Zie blz. PD-210)

$$Lv = \frac{d^2 v}{dx^2} + v = 0 \text{ levert}$$

$$v = \begin{cases} \alpha \cos x + \beta \sin x & 0 \leq x < \xi \\ \gamma \cos x + \delta \sin x & \xi < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

(4B) geeft aanleiding tot $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

(2) levert $\alpha \cos \xi = \delta \sin \xi$, stel dus

$$\alpha = \rho \sin \xi, \quad \delta = \rho \cos \xi.$$

Nu (3): de afgeleidsprong bedraagt ($p(\xi) = 1$)

$$v'(\xi^+) - v'(\xi^-) = + \rho \cos^2 \xi + \rho \sin^2 \xi = \rho = -1.$$

Dus

$$v(x, \xi) = \begin{cases} -\sin \xi \cos x & 0 \leq x \leq \xi \\ -\sin x \cos \xi & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

We berekenen $v(0) = -\sin \xi$, $v(\frac{\pi}{2}) = -\cos \xi$, dus volgens (23.5B), omdat $C = D = 0$ gegeven was.

$$\begin{aligned} 1. u(\xi) &= 0 - 0 - \int_0^{\pi/2} v(x, \xi) f(x) dx = \\ &= \int_0^{\xi} \sin \xi \cos x \cdot 2e^x dx + \int_{\xi}^{\pi/2} \cos \xi \sin x \cdot 2e^x dx \\ &= \sin \xi \cdot e^x (\cos x + \sin x) \Big|_0^{\xi} + \cos \xi \cdot e^x (\sin x - \cos x) \Big|_{\xi}^{\pi/2} = \\ &= e^{\xi} [\cos \xi \sin \xi + \sin^2 \xi - \sin \xi \cos \xi + \cos^2 \xi] - \sin \xi + e^{\pi/2} \cos \xi \\ &= e^{\xi} - \sin \xi + e^{\pi/2} \cos \xi. \end{aligned}$$

Het algemene idee is nu wel te achterhalen:

|| Probeer onder de gegeven randvoorwaarden van u aan v zodanige
condities op te leggen, dat twee onbekende termen uit (23.5)
verdwijnen.

Voorbeeld 3

Bezien we nu nogmaals de in (22.14) gegeven vergelijking als gewone d.v. met p als parameter.

$$a u_{xx} - p u = -f(x).$$

Deze vergelijking is van het soort (23.1); $p(x) = a$, $q(x) = -p$. Het gegeven interval is $(-\infty, \infty)$ met de op PD-203 gegeven natuurlijke randvoorwaarden (begrensdheid) voor u . We zoeken de Greense functie:

$$Lv = a v_{xx} - p v = 0.$$

De enige in $\pm\infty$ begrensde oplossing is

$$v = \begin{cases} \alpha e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} & (x < \xi) \\ \beta e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} & (x > \xi) \end{cases}.$$

Continuïteit in ξ : $\alpha e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} = \beta e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$. Stel dus $\alpha = \rho e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$, $\beta = \rho e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$.

De afgeleidensprong is $v'(\xi^+) - v'(\xi^-) = -2\rho\sqrt{\frac{p}{a}} = -\frac{1}{a}$.

Derhalve

$$v(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \begin{cases} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(x-\xi)} & (x \leq \xi) \\ e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(\xi-x)} & (x \geq \xi) \end{cases}.$$

Samengevat:
$$v(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|}.$$

Merk op, dat $v(-\infty) = v'(-\infty) = v(\infty) = v'(\infty) = 0$. Van (23.5) blijft dus slechts over

$$u(\xi, p) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|} f(x) dx \quad (23.6)$$

een formule, die we in (22.19) al ontmoetten.

Voorbeeld 4

Een ander warmtegeleidingsvraagstuk. Een halfoneindige dunne staaf ($0 \leq x < \infty$) heeft ten tijde $t = 0$ de temperatuur $U(x, 0) = f(x)$. Het uiteinde ($x = 0$) wordt onderworpen aan een temperatuurverloop $U(0, t) = g(t)$. Bereken $U(x, t)$ als geldt de differentiaalvergelijking $U_t = a U_{xx}$.

Oplossing

Met Laplacetransformatie naar t

$$u(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, t) dt.$$

Noem $u(0, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = \bar{g}(p).$

Dit levert, geheel analoog aan de redenering van (22.13) tot (22.14) als D.V.

$$\left. \begin{aligned} a u_{xx} - p u &= -f(x) \\ \text{met de randvoorwaarde } u(0, p) &= \bar{g}(p). \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

De tweede, natuurlijke, randvoorwaarde is begrensdsheid voor $x \rightarrow \infty$.

We zoeken eerst de Greense funktie $v(x, \xi)$ met conditie (4). $v(0, \xi) = 0$, $v(\infty)$ begrensd:

$$Lv = a v_{xx} - p v = 0 \text{ geeft dan}$$

$$v = \begin{cases} \alpha e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} & (x > \xi) \\ \beta \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}x & (0 \leq x < \xi) \end{cases}.$$

Door continuïteit in ξ blijkt $\alpha = \rho \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi$, $\beta = \rho e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$

$$v'(\xi^+) = -\rho \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$$

$$v'(\xi^-) = \rho \sqrt{\frac{p}{a}} \cosh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$$

afrekken

$$\text{Sprong} = -\rho \sqrt{\frac{p}{a}} = -\frac{1}{a} \quad (\sinh \text{ en } \cosh \text{ uitschrijven!}).$$

Derhalve moet $\rho = \frac{1}{\sqrt{ap}}$. De Greense funktie luidt dus

$$v(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{ap}} \cdot \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}x & 0 \leq x \leq \xi \\ \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi \cdot e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} & x \geq \xi \end{cases} \quad (23.8)$$

Merk op, dat $v(\infty) = v'(\infty) = v(0) = 0$, maar $v'(0) = e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} \cdot \frac{1}{a}$.

Daardoor gaat (23.5) in dit geval over in

$$\begin{aligned} u(\xi, p) &= e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} u(0, p) + \int_0^\infty v(x, \xi) f(x) dx \\ &= \bar{g}(p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} + \Phi(\xi, p). \end{aligned} \quad (23.9)$$

De eerste term is toe te schrijven aan het temperatuurverloop in $x = 0$, de integraal $\Phi(\xi, p)$ komt van de temperatuurverdeling op het tijdstip $t = 0$. (Stel hiertoe $\bar{g}(p) = 0 \rightarrow g(t) = 0$, de oorsprong wordt a.h.w. op het temperatuurnulpunt gefixeerd.)

We beschouwen eerst $\Phi(\xi, p)$ nader. Voor de funktie $v(x, \xi)$ kunnen we schrijven:

$$v(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \begin{cases} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(x-\xi)} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(x+\xi)} & 0 \leq x \leq \xi \\ e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(-x+\xi)} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(x+\xi)} & x \geq \xi \end{cases}.$$

Samengevat:

$$v(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \left(e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(x+\xi)} \right). \quad (23.10)$$

We vinden zodoende

$$\Phi(\xi, p) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|} f(x) dx - \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(x+\xi)} f(x) dx.$$

Dus, teruggetransformeerd volgens de formule op blz. PD-150 (zie ook PD-203) vinden we voor het niet van $g(t)$ afhankelijke stuk $U_1(\xi, t)$ van $U(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} U_1(\xi, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \Phi(\xi, p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x=0}^\infty f(x) dx \int_{p=\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}|x-\xi|} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(x+\xi)}}{2\sqrt{ap}} e^{pt} dp. \end{aligned}$$

De p -integraal wordt op dezelfde wijze behandeld als geschetst op PD-204 en 205, zodat

$$U_1(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{x=0}^\infty f(x) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4at}} \right) dx \quad (23.11)$$

Fysische interpretatie: (zie opm.1 na (22.22)). We kunnen ons probleem opvatten als de temperatuurverdeling in een dubbeloneindige staaf met begintoestand $f(x)$ voor positieve x , $-f(-x)$ voor negatieve x (substitueer in het tweede stuk van (23.11) $x = -y$).

Anders gezegd: een staaf, waarin symmetrisch t.o.v. de oorsprong links dezelfde negatieve temperatuur heerst als rechts positieve. Logisch dat dan juist het punt 0 op temperatuur 0 blijft, in overeenstemming met onze splitsing van $U(\xi, t)$.

Nu moeten we de eerste term van (23.9) nog terugtransformeren.

Het Laplace-origineel van $\bar{g}(p)$ is $g(t)$. Dat van $e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$ ($\xi \geq 0$) gaan we nu bepalen: Stel dit is $F(t)$, dus

$$e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} = \mathcal{L}\{F(t)\} \equiv_{\text{def}} \int_0^\infty F(t) e^{-pt} dt. \quad (23.12)$$

Differentiatie naar p geeft

$$-\frac{\xi}{2\sqrt{ap}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} = \int_0^\infty -t F(t) e^{-pt} dt \equiv_{\text{def}} -\mathcal{L}\{t F(t)\}.$$

Aangezien ξ niet van p afhangt, leiden we hieruit af

$$\frac{1}{2\sqrt{ap}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} = \mathcal{L} \left\{ \frac{t}{\xi} F(t) \right\}. \quad (23.13)$$

Maar vanaf (22.19) t/m (22.22) hebben we het Laplace-origineel van het linkerlid uit (23.13) reeds bepaald. Dit bleek te zijn (hier met

$$\xi \text{ i.p.v. } |x-\xi|) \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{\xi^2}{4at}}. \text{ Combinatie met (23.13) levert } \frac{t}{\xi} F(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{\xi^2}{4at}}, \text{ dus}$$

$$F(t) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi a} \cdot t^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4at}}.$$

Daar de eerste term van (23.9) het product is van $\bar{g}(p)$ en $e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi}$, is zijn Laplace-origineel de convolutie van $g(t)$ en $F(t)$ (vgl. PD-134)

$$g(t) * F(t) = \int_0^t g(\tau) F(t-\tau) d\tau = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t g(\tau) \cdot \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

De bijdrage tot $U(\xi, t)$, afkomstig van het temperatuurverloop $U(0, t) = g(t)$ in de oorsprong bedraagt dus

$$U_2(\xi, t) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t g(\tau) (t-\tau)^{-3/2} e^{-\frac{\xi^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \quad (23.14)$$

Superpositie van $U_1(\xi, t)$ en $U_2(\xi, t)$ levert de totale oplossing van het gestelde probleem op blz. PD-215.

We zullen nog controleren, dat bij vaste t $\lim_{\xi \downarrow 0} U_2(\xi, t) = g(t)$.

Substitueren we daartoe $\tau = -\frac{\xi^2}{4a\lambda^2} + t$, dus $\xi^2 = 4a\lambda^2(t-\tau)$ en beschouwen we λ als integratievariabele: $d\tau = \frac{\xi^2}{2a\lambda^3} d\lambda$.

$$U_2(\xi, t) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi a}} \int_{\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{4at}}}^{\infty} g\left(t - \frac{\xi^2}{4a\lambda^2}\right) \cdot \left(\frac{4a\lambda^2}{\xi^2}\right)^{3/2} \cdot e^{-\lambda^2} \frac{\xi^2}{2a\lambda^3} d\lambda,$$

$$U_2(\xi, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{\sqrt{4at}}}^{\infty} g\left(t - \frac{\xi^2}{4a\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda. \quad (23.15)$$

Maken we hier $\xi = 0$, dan staat het antwoord er reeds, daar $\int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. We zouden echter een subtielere redenering moeten houden, analoog met opm.2 op blz. PD-206. Dit laten we achterwege.

Opmerkingen

- Uit de tot heden behandelde voorbeelden blijkt, dat de Greense functie wel eens symmetrisch zou kunnen zijn in x en ξ , dwz. $v(x, \xi) = v(\xi, x)$. (Controleer dit bij elk voorbeeld afzonderlijk!) Dit is inderdaad altijd het geval (hier geen bewijs). We zullen bij het opstellen van de Greense functie in het vervolg een nuttig gebruik maken van deze eigenschap.
- Notatie-afspraken. Conform de meeste literatuur op dit gebied zullen we de Greense functie voortaan aangeven met de letter G . Vaak, zoals in voorbeeld 3 en 4 zal G behalve van x en ξ ook nog van een parameter (p) afhangen. Dan is dus $G = G(x, \xi; p)$.
- Het gedrag van $LG(x, \xi)$ in het punt ξ . (Zie onderste alinea's PD-210) Voor $x < \xi$ en voor $x > \xi$ geldt

$$LG(x, \xi) \equiv_{\text{def}} \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dG}{dx} \right\} + q(x) G = 0.$$

In het punt $x = \xi$ is de tweede term continu, en maakt de accolade-uitdrukking van links naar rechts een sprong ter grootte -1 (zie voorwaarde (3) op PD-212) dus LG vertoont het karakter van een negatieve δ -functie met piek in $x = \xi$.

Voorbeeld 5

We onderzoeken nu het temperatuurverloop $U(x, t)$ in een eindige, homogene, dunne staaf ($0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$), $U_t = a U_{xx}$, waarbij $U(0, t) = f(t)$, $U(\ell, t) = g(t)$, $U(x, 0) = h(x)$.

Oplossing

Laplacetransformatie: $u(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x, t) dt$.

Resultaat: $pu - U(x, 0) = a \frac{d^2 u}{dx^2}$.

$u(x, p)$ moet dus voldoen aan

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} - pu = -h(x) \quad (23.16)$$

onder de extra voorwaarden

$$\begin{aligned} u(0) &= u(0, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \bar{f}(p) \\ u(\ell) &= u(\ell, p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt = \bar{g}(p) \end{aligned} \quad (23.17)$$

We bepalen eerst de Greense funktie $G(x, \xi; p)$ met de conditie (4A): $G(0) = G(\ell) = 0$ (type A, PD-212). Voor $x \leq \xi$ levert $LG = a G_{xx} - pG = 0$, samen met $G(0) = 0$: $G = C \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} x$, C constant. Voor $x \geq \xi$ vinden we, doordat $G(\ell) = 0$: $G = D \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - x)$, D constant. Gecombineerd levert dit door de symmetrie van G en de continuïteit in ξ :

$$G(x, \xi; p) = \begin{cases} A \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi) \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} x & x \leq \xi \\ A \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - x) & x \geq \xi \end{cases}$$

$$G'(\xi^+) = -A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi \cosh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - x) \quad (x = \xi)$$

$$G'(\xi^-) = +A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi) \cosh \sqrt{\frac{p}{a}} x \quad (x = \xi)$$

aftrekken

$$\text{Sprong} = -A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell = -\frac{1}{p(\xi)} = -\frac{1}{a} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{ap} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell}$$

De uitkomst van de aftrekking is een gevolg van het optellingstheorema: $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$. We vinden derhalve

$$G(x, \xi; p) = \frac{1}{\sqrt{ap}} \begin{cases} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi) \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} x & x \leq \xi \\ \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - x) & x \geq \xi \end{cases} \quad (23.18)$$

$$G'(0) = A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi) \cosh \sqrt{\frac{p}{a}} x \underset{(x=0)}{=} A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi)$$

$$G'(\ell) = -A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi \cosh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - x) \underset{(x=\ell)}{=} -A \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi$$

Derhalve volgens (23.5A):

$$u(\xi) = \int_0^\ell G(x, \xi; p) h(x) dx + \bar{f}(p) \frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi)}{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell} + \bar{g}(p) \frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \xi}{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell} \quad (23.19)$$

De eerste term correspondeert weer met het temperatuurverloop t.g.v. de begintoestand waarbij $x = 0$ en $x = \ell$ op constante nultemperatuur worden gehouden, de beide andere met de gevolgen van de in 0 en ℓ opgelegde temperatuurwaarden.

We bepalen eerst het Laplace-origineel van de eerste term uit (23.19). Het is voldoende dit voor $x \leq \xi$ te doen wegens de symmetrie van G . Verder is $h(x)$ bij het terugtransformeren constant (integratie over p).

We berekenen derhalve (zie PD-150) voor $x \leq \xi$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(x, \xi; p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} x \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} (\ell - \xi)}{\sqrt{ap} \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell} e^{pt} dp. \quad (23.20)$$

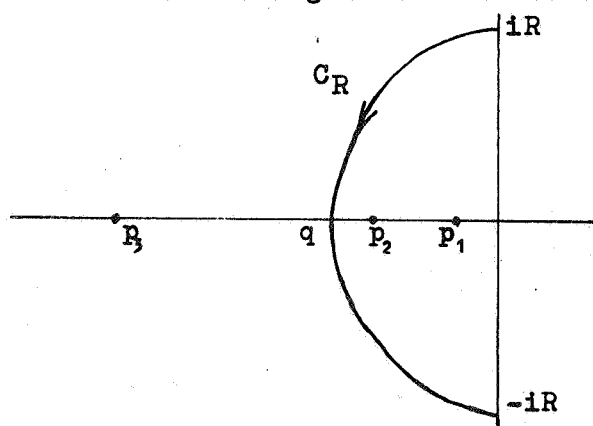
Het punt $p = 0$ lijkt door alle wortels wel een vertakkingspunt van de integrand. Dit is evenwel niet waar: Reeksontwikkeling van alle hyperbolische sinussen voor positief reële p geeft immers

$$\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} z = \sqrt{\frac{p}{a}} z \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \frac{p}{a} z^2 + \dots\right) \quad (z = x, \ell - \xi, \ell)$$

en we zien dat bij vereenvoudiging alle wortels wegvallen: $p = 0$ blijkt door het analytische karakter van de integrand een regulier punt te zijn.

Wél treffen we singulariteiten aan, waar $\sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell = 0$. Aangezien $i \sinh \sqrt{\frac{p}{a}} \ell = \sin i \sqrt{\frac{p}{a}} \ell$ zijn deze singulariteiten daar te vinden, waar $i \sqrt{\frac{p}{a}} \ell = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), of $p_k = -\frac{ak^2 \pi^2}{\ell^2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Dit zijn ook de enige singulariteiten. Ziehier een fraaie illustratie van de stelling op PD-132. Het rechterhalfvlak $\operatorname{Re} p \geq 0$ bijvoorbeeld is een regulariteitshalfvlak. In (23.20) kiezen we $\gamma = 0$



Als integratieweg nemen we het lijnstuk van $-iR$ tot $+iR$ en de linker halfcirkel C_R hierop. R geven we zo'n waarde, dat C_R geen der punten p_k

bevat. We maken nu een schatting van de breuk in (23.20) op C_R .

Daar is $p = R e^{i\theta}$ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$),

dus $\sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{R}{a}} e^{\frac{1}{2}i\theta}$. De breuk wordt

$$\frac{\left\{ e^{\frac{\sqrt{R}}{a} x e^{\frac{1}{2}i\theta}} - e^{-\frac{\sqrt{R}}{a} x e^{\frac{1}{2}i\theta}} \right\} \left\{ e^{\frac{\sqrt{R}}{a} (\ell - \xi) e^{\frac{1}{2}i\theta}} - e^{-\frac{\sqrt{R}}{a} (\ell - \xi) e^{\frac{1}{2}i\theta}} \right\}}{2\sqrt{aR} e^{\frac{1}{2}i\theta} \left\{ e^{\frac{\sqrt{R}}{a} \ell e^{\frac{1}{2}i\theta}} - e^{-\frac{\sqrt{R}}{a} \ell e^{\frac{1}{2}i\theta}} \right\}}$$

Noteren we dit ter afkorting als $\frac{(A-B)(C-D)}{P(Q-S)}$.

Bepalend voor de modulus van een e -macht is het reële deel van zijn exponent. In elke term tussen de accolades bedraagt dit een reëel veelvoud van $\operatorname{Re} (e^{\frac{1}{2}i\theta}) = \cos \frac{1}{2}\theta$.

- a) $\cos \frac{1}{2}\theta > 0$ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$). Voor $R \rightarrow \infty$ nemen A, C, P en Q onbeperkt toe in absolute waarde, terwijl B, D en S naar nul gaan. De breuk heeft dus de grootte orde

$$\left| \frac{AC}{PQ} \right| = \frac{e^{\sqrt{\frac{R}{a}}(x-\xi) \cos \frac{1}{2}\theta}}{2\sqrt{aR}} = O(R^{-\frac{1}{2}})$$

omdat de e-macht hoogstens 1 bedraagt ($x \leq \xi$)

- b) $\cos \frac{1}{2}\theta < 0$ ($\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$). Nu groeien B, D, P en S onbeperkt, en gaan A, C en Q naar nul als $R \rightarrow \infty$, en wordt de orde van grootte

$$\left| \frac{BD}{PS} \right| = \frac{e^{-\sqrt{\frac{R}{a}}(x-\xi) \cos \frac{1}{2}\theta}}{2\sqrt{aR}} = O(R^{-\frac{1}{2}}).$$

Volgens het lemma van Jordan (PD-152) heeft de integraal over C_R dan ook de orde van grootte $R^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ als $R \rightarrow \infty$.

Opmerking

Bovenstaande redenering was geen streng bewijs. Hiervoor zouden in de buurt van het overgangspunt $q(\theta = \frac{1}{2}\pi)$ nog continuïteitsargumenten moeten worden gebruikt. Dit laten we hier achterwege.

Op grond van de residustelling (PD-85) mogen we nu voor (23.20) schrijven, als $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} G(x, \xi; p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Res. } G e^{pt})_{p=p_k}. \quad (23.21)$$

We bepalen het residu van $G(x, \xi; p) e^{pt}$ in het punt $p_k = -\frac{ak^2\pi^2}{\ell^2}$.

Hiertoe berekenen we $\lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) G(x, \xi; p) e^{-pt}$ volgens (13.17). Als

deze limiet bestaat hebben we te maken met een enkelvoudige pool in p_k en is de limiet het residu.

$$\begin{aligned} \text{Stel } \sqrt{\frac{p}{a}}\ell &= ik\pi + \delta \quad (\delta \rightarrow 0), \text{ dan is } p = \frac{a}{\ell^2} (ik\pi + \delta)^2 = \\ &= -\frac{ak^2\pi^2}{\ell^2} + \frac{2iak\pi\delta}{\ell^2} + \frac{a\delta^2}{\ell^2} = p_k + \delta \frac{a}{\ell^2} (2ik\pi + \delta). \end{aligned}$$

Ingevuld komt er

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \frac{a}{\ell^2} (2ik\pi + \delta) \cdot \frac{\sinh \frac{ik\pi + \delta}{\ell} x \sinh \frac{ik\pi + \delta}{\ell} (\ell - \xi)}{\frac{a}{\ell} (ik\pi + \delta) \sinh (ik\pi + \delta)} e^{pt}.$$

De limiet is factorgewijs te nemen, als we $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sinh(ik\pi + \delta)} =$
 $= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta(-1)^k}{\sinh \delta} = (-1)^k$ samen beschouwen. De uitkomst is tenslotte

$$\frac{a}{\ell^2} 2ik\pi \frac{\sinh \frac{ik\pi x}{\ell} \sinh \frac{ik\pi(\ell-\xi)}{\ell}}{\frac{a}{\ell} \cdot ik\pi} (-1)^k e^{p_k t}$$

zodat we na omrekening in sinussen krijgen: (ga dit na!)

$$(\text{Res. } G e^{pt})_{p=p_k} = \frac{2}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \cdot e^{-\frac{ak^2\pi^2}{\ell^2} t}. \quad (23.22)$$

Het Laplace origineel van de eerste term van (23.19) luidt dus, als we (23.21, 22) combineren:

$$U_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{ak^2\pi^2}{\ell^2} t} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} h(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \right] \sin \frac{k\pi \xi}{\ell}. \quad (23.23)$$

Elementaire afleiding van (23.23)

We zoeken de oplossing van $U_t = a U_{xx}$, ($0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$) waarbij $U(0, t) = U(\ell, t) = 0$, $U(x, 0) = h(x)$ door middel van separatie:
 Stel $U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. De d.v. gaat over in $X \frac{dT}{dt} = a T \frac{d^2 X}{dx^2}$, of

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{a}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda.$$

De constante λ moet positief zijn, daar de oplossing $\log T = -\lambda t \rightarrow T = e^{-\lambda t}$ slechts voor positieve λ fysisch aanvaardbaar is.

$a \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0$ levert $X = B \sin \sqrt{\frac{\lambda}{a}} x + C \cos \sqrt{\frac{\lambda}{a}} x$ dus

$$U(x, t) = e^{-\lambda t} (B \sin \sqrt{\frac{\lambda}{a}} x + C \cos \sqrt{\frac{\lambda}{a}} x).$$

$U(0, t) = 0$ geeft $C = 0$; $U(\ell, t) = 0$ impliceert $\sqrt{\frac{\lambda}{a}} \ell = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

dus $\lambda = \frac{ak^2\pi^2}{\ell^2}$. De elementaire oplossingen waarvoor $U(0, t) = U(\ell, t) = 0$ zijn dus

$$U_{(k)} = B_k e^{-\frac{ak^2\pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Door superpositie $U = \sum U_{(k)}$ proberen we nu aan de voorwaarde $U(x,0) = h(x)$ te voldoen. Dus moet gelden:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}.$$

In woorden: $h(x)$ moet worden ontwikkeld in een Fouriersinusreeks in het interval $[0, \ell]$. $h(x)$ zal dus als oneven functie met periode 2ℓ moeten worden beschouwd. Zijn Fouriercoëfficiënten zijn dan (zie PD-112 opgave a) en PD-105 bovenaan)

$$B_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} h(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi.$$

$$\text{Resultaat: } U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} h(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] e^{-\frac{ak^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{k\pi x}{\ell},$$

hetgeen met (23.23) overeenstemt.

Opmerking

Het oneven, periodieke karakter van $h(x)$ garandeert fysisch, dat de punten 0 en ℓ op het temperatuurnulpunt worden gefixeerd. (vgl. de fysische interpretatie onder (23.11))

Keren we nu terug tot de behandeling van (23.19) en wel de laatste twee termen.

Het Laplace-origineel van $\frac{\sinh \frac{\sqrt{p}}{a} \xi}{\sinh \frac{\sqrt{p}}{a} \ell}$ is volgens de omkeerformule op PD-150 gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \frac{\sinh \frac{\sqrt{p}}{a} \xi}{\sinh \frac{\sqrt{p}}{a} \ell} dp. \quad (23.24)$$

De integrand heeft weer geen vertakkingspunt in $p = 0$ (nagaan!) en enkelvoudige polen in de nulpunten van $\sinh \frac{\sqrt{p}}{a} \ell$, $p \neq 0$ (zie PD-221) dus $p_k = -\frac{ak^2 \pi^2}{\ell^2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). We kunnen dus voor γ nul nemen.

De integrand van (23.24) heeft, mits we met de halfcirkel C_R voldoende ver van de polen wegblijven, de orde van grootte (stel $p = R e^{i\theta}$ met $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) $e^{\frac{\sqrt{R}}{a}(\xi-\ell)\cos \frac{1}{2}\theta}$ voor $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$, en $e^{-\frac{\sqrt{R}}{a}(\xi-\ell)\cos \frac{1}{2}\theta}$ als $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ (merk op dat $\xi < \ell$).

In beide gevallen dus een e-macht met negatieve exponent in de orde $\sqrt{R}$. De integraal over C_R wordt dus van de orde $\pi R \cdot e^{-\gamma R}$ (γ positief) $\rightarrow 0$

als $R \rightarrow \infty$, wanneer we in de buurt van het grenspunt q voorzichtigheid betrachten (wordt hier niet behandeld). Derhalve is de integraal (23.24) gelijk aan de som der residuen van de integrand in de punten p_k . (Residustelling PD-85.)

$$\sqrt{\frac{p}{a}}\ell = ik\pi + \delta \text{ geeft } p = p_k + \delta \frac{a}{\ell^2} (2ik\pi + \delta),$$

dus $p - p_k = \frac{2ik\pi a}{\ell^2} \delta$, als we termen van de orde δ^2 verwaarlozen. Het residu in p_k wordt dus

$$\begin{aligned} (\text{Res})_{p_k} &= \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) e^{pt} \frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi}{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\ell} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2ik\pi a}{\ell^2} \delta \cdot e^{pt} \cdot \frac{\sinh(ik\pi + \delta)\xi/\ell}{\sinh(ik\pi + \delta)} = \\ &= \frac{2ik\pi a}{\ell^2} \cdot e^{-\frac{ak^2\pi^2 t}{\ell^2}} \cdot \frac{i \sin k\pi\xi/\ell}{(-1)^k} = \\ &= (-1)^{k+1} \cdot \frac{2k\pi a}{\ell^2} e^{-\frac{ak^2\pi^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell}. \end{aligned}$$

Het Laplace-origineel van $\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi / \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\ell$ is dus

$$\frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1} e^{-\frac{ak^2\pi^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell}. \quad (23.25)$$

Derhalve vinden we voor het Laplace-origineel van $\bar{g}(p) \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\xi / \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\ell$ de convolutie-integraal

$$U_1(\xi, t) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \int_0^t g(t-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k e^{-\frac{k^2\pi^2 a\tau}{\ell^2}} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\tau. \quad (23.26)$$

Analoog krijgen we voor de bijdrage van de tweede term uit (23.19) tot U . (omdat $\sin \frac{k\pi(\ell-\xi)}{\ell} = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell}$)

$$U_2(\xi, t) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \int_0^t f(t-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{k^2\pi^2 a\tau}{\ell^2}} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\tau. \quad (23.27)$$

De oplossing van ons voorbeeld 5 (PD-219) is de som van U_1 , U_2 en U_3 (zie (23.23, 26, 27)).

Nadere beschouwing van (23.25, 26, 27) (toegift voor de liefhebbers)

De convergentie van de reeks in (23.25) is te danken aan de e-macht voor $t > 0$. Bij $t = 0$ is de reeks zwaar divergent. (orde kde term = k) We willen aantonen dat in (23.26)

$$\lim_{\xi \uparrow \ell} U_3(\xi, t) = g(t)$$

$$\lim_{\xi \downarrow 0} U_3(\xi, t) = 0.$$

Het ligt dus voor de hand, dat er bij $t = 0$ moeilijkheden komen. Dit onderzoeken we nu: zolang $0 < \xi < \ell$ en $t > 0$ kunnen we in (23.26) sommatie en integratie verwisselen. We bepalen dus eerst met partiële integratie

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-\tau) e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau = \\ &= -\frac{\ell^2}{k^2 \pi^2 a} g(t-\tau) e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} \Big|_0^t - \frac{\ell^2}{k^2 \pi^2 a} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} g'(t-\tau) d\tau \\ &= -\frac{\ell^2}{k^2 \pi^2 a} g(0) e^{-\frac{k^2 \pi^2 a t}{\ell^2}} + \frac{\ell^2}{k^2 \pi^2 a} g(t) - \frac{\ell^2}{k^2 \pi^2 a} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} g'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ingevuld levert dit voor de sommatie in (23.26) drie reeksen (overeenkomende met de drie termen in de laatste formule).

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2}{\pi} g(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-\frac{k^2 \pi^2 a t}{\ell^2}} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} \\ B &= \frac{2}{\pi} g(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} \\ C &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} g'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

We laten nu $\xi \downarrow 0$ resp. $\xi \uparrow \ell$, en kijken wat er gebeurt (t houden we vast, positief).

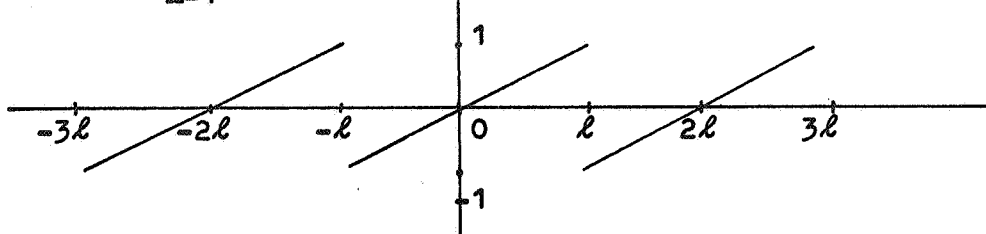
- A. De termen van de reeks gaan naar nul in beide gevallen. Anderzijds is elke term afzonderlijk voor alle ξ in absolute waarde kleiner dan $\frac{1}{k} e^{-\frac{k^2 \pi^2 a t}{\ell^2}}$ dus bij vaste t is de reeks uniform convergent t.a.v. ξ . Derhalve nadert de som ook tot nul als $\xi \downarrow 0$ resp. $\xi \uparrow \ell$. (Zie Titchmarsh, Theory of Functions, Ch.I §.1)
- C. De termen gaan ook naar nul en worden als $g(t)$ niet te "wild" is gemajoreerd door een constante maal

$$\frac{1}{k} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau = O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Ook hier dus uniforme convergentie t.a.v. ξ , en de som van de reeks gaat naar 0 als $\xi \downarrow 0$ resp. $\xi \uparrow \ell$.
(Zie Titchmarsh, Theory of Functions, Ch.I §.1)

- B. Hier krijgen we te maken met de reeks

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell}.$$



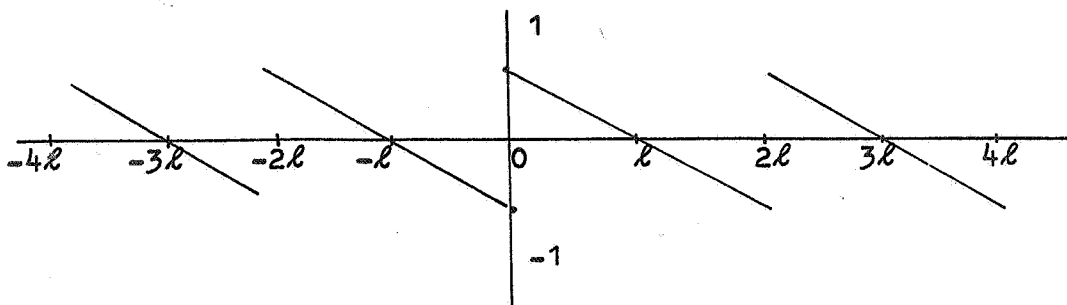
Dit is de Fourierreeks van de zaagtandfunctie $G(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi$

$(-\ell < \xi < \ell)$ (periode 2ℓ). Controleer dit aan de hand van opgave a) op PD-112. Zie ook PD-105.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de Fouriertheorie (zie stelling op PD-106) concluderen we, dat deze reeks overal de functie $G(\xi)$ voorstelt. Aangezien $\lim_{\xi \downarrow 0} G(\xi) = 0$, en $\lim_{\xi \uparrow \ell} G(\xi) = 1$ krijgen we

dus alleen een bijdrage tot B als $\xi \uparrow \ell$, en deze bijdrage is juist $g(t)$.

De analyse van (23.27) verloopt op dezelfde wijze. Hier krijgen we te maken sub B met de zaagtandfunctie $F(\xi) = 1 \cdot \frac{\xi}{\ell}$ ($0 < \xi < 2\ell$) periode 2ℓ .



De mathematische moeilijkheden worden veroorzaakt door de verstoring van de uniforme convergentie der Fourierreeks bij de sprongen in de zaagtandfuncties ($\xi = 0, \ell$). Fysisch hadden we dit kunnen voorzien, doordat we bij de eindpunten $\xi = 0, \ell$ op het tijdstip $t = 0$ ineens een temperatuurniveau $f(0)$ resp. $g(0)$ instellen, terwijl de eindpunten op temperatuur $h(0)$ resp. $h(\ell)$ waren. Deze verstoring in de continuïteit moet zich mathematisch ergens gaan wreken. Hier gebeurt dat bij de uniforme convergentie. (Einde toegift.)

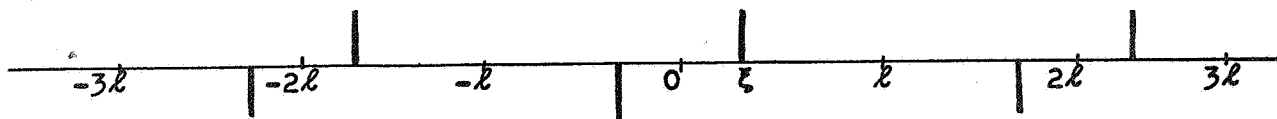
Aan de oplettende lezer zal het opvallen dat de formules (23.23, 26, 27) snelle convergentie geven voor grote t . (de e -macht drukt de termen snel naar nul.) Bij kleine $t > 0$ daarentegen kunnen we wel eens heel veel termen nodig hebben om een redelijke benadering van de uitkomst te krijgen (het duurt lang voordat de e -macht effect krijgt). Bovendien valt het op, dat we bij de behandeling van de eindige staaf nergens meer de speciale bronoplossing tegenkomen, die juist bij de tweezijdig - en de éénzijdig oneindige staaf (voorbeeld 3 en 4) zo'n grote rol speelt (zie 22.12, 22), (23.11, 14). Dit bezien we nader

I De van de beginsituatie $U(x,0) = h(x)$ afkomstige term (zie 23.19). We ontwikkelen de bijbehorende Greense funktie $G(x,\xi;p)$ uit (23.18) in e -machten voor positieve p . Neem eerst $x \leq \xi$.

$$\begin{aligned}
 G(x,\xi;p) &= \frac{1}{\sqrt{ap}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-\xi) \sinh \sqrt{\frac{p}{a}}x}{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\ell} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{ap}} \cdot \left\{ e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-\xi)} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-\xi)} \right\} \left\{ e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} \right\} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\ell}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{p}{a}}\ell}} = \\
 &\quad \text{(laatste factor in meetkundige reeks ontwikkelen, accolades wegwerken)} \\
 &= \text{een som van termen van de vorm} \\
 &\quad \pm \frac{1}{2\sqrt{ap}} e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(\pm x \pm \xi - 2k\ell)} \quad (23.28)
 \end{aligned}$$

(Ga dit gedetailleerd na!)

Ook voor $x \geq \xi$ vinden we zo'n reeks. Kortom, elke term van de vorm (23.28) is Greense funktie (van de dubbeloneindige staaf) met sprongpunt niet in $x = \xi$, maar in $x = \pm \xi \pm 2k\ell$ voor geschikte k (zie PD-215 bovenaan), correspondeert dus met een eenheidswarmtebron (sterkte ± 1) in het betrokken sprongpunt, en wel bij nauwkeurige beschouwing als volgt:



Uitgaande van een bron +1 in ξ vinden we alle andere bronnen door herhaalde spiegeling aan de vaste punten 0 en ℓ . Bij elke spiegeling draait het teken van de bron om. (In de figuur: positieve bronnen boven de as, negatieve er onder.)

Opmerking 1

De invloed van een bron op grote afstand is pas veel later merkbaar dan die van een nabije bron. Voor kleine t gebruiken we dus bij de berekening van (23.19) slechts die (nabije) bronnen, waarvan de invloed al numeriek waarneembaar is.

Opmerking 2

Laten we in de zojuist afgeleide reeksontwikkeling van $G(x, \xi; p)$ ℓ naar oneindig gaan, dan gaan alle termen naar nul, op twee na, die juist overeenstemmen met (23.10).

Opmerking 3

De gevonden reeksontwikkeling is convergent voor alle p in het langs de negatieve reële as opengesneden p -vlak.

II De invloed van de randwaarden $U(0, t) = f(t)$, $U(\ell, t) = g(t)$ (zie (23.19)). We behandelen alleen de f -term. De g -term gaat analoog. Voor positieve p schrijven we

$$\frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - \xi)}{\sinh \sqrt{\frac{p}{a}}\ell} = \left\{ e^{\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - \xi)} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - \xi)} \right\} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\ell}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{p}{a}}\ell}} =$$

$$= e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\xi} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(2\ell - \xi)} + e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(\xi + 2\ell)} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(4\ell - \xi)} + \dots$$

Ook hier is de gevonden reeks convergent in het gehele p -vlak behoudens coupure bij negatief reële p .

Elke term is Laplace-beeld (zie PD-217-218) van een funktie van de vorm

$$\frac{\eta}{2\sqrt{\pi a} \cdot t^{3/2}} e^{-\frac{\eta^2}{4at}} \quad (\eta = \xi \pm 2n\ell) \quad (23.29)$$

De funktie $U_2(\xi, t)$ uit (23.27) kan dus ook geschreven worden als som van convolutie-integralen van de gedaante

$$\frac{\eta}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t f(t-\tau) \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\eta^2}{4a\tau}} d\tau \quad (\eta = \xi \pm 2n\ell) \quad (23.30)$$

Vergelijking van (23.30) met (23.14) leert, dat (23.30) is op te vatten als randeffect van een halfoneindige staaf met eindpunt $\eta = 0 \Rightarrow \xi = \pm 2n\ell$.

We kunnen (23.30) ook beschrijven als een effect in de dubbeloneindige staaf. Voor de eenheidswarmtebron in θ geldt de oplossing

$$U_{\theta}(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} e^{-\frac{(\xi-\theta)^2}{4at}} \quad (\text{zie (22.12) e.v.})$$

Definieer zoals gebruikelijk de "eenheidsdipool" in θ (PD-45) door

$$(\text{Dipool})_{\theta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} (\text{bron})_{\theta+\delta} - \frac{1}{\delta} (\text{bron})_{\theta} \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{bron})_{\theta}.$$

Hier:
$$\frac{\partial}{\partial \theta} U_{\theta}(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \frac{2(\xi-\theta)}{4at} e^{-\frac{(\xi-\theta)^2}{4at}}.$$

Dus de eenheidswarmtedipool in θ heeft als oplossing

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{\xi - \theta}{2\sqrt{\pi a \cdot t}^{1/2}} e^{-\frac{(\xi-\theta)^2}{4at}} \quad (\text{zie (23.29)})$$

De functie $U_2(\xi, t)$ is dus een superpositie van convolutie-integralen met warmte-dipolen in de punten $\pm 2n\ell$. Voor kleine t -waarden behoeven weer alleen de dichtstbijzijnde dipolen te worden beschouwd.

Opmerking

Onder I en II is een functie met enkelvoudige polen op de negatieve reële as en regulier punt $p = 0$ ontwikkeld naar functies met vertakkingspunt $p = 0$. (Deze ontwikkelingen waren alleen in het opengesneden p -vlak geldig.)

Ziehier een illustratie van de analytische voortzetting van een reeks van functies tot de negatief reële as.

Opgave

Bepaal de oplossing van de d.v. $U_t = a U_{xx}$ ($t \geq 0$, $0 \leq x \leq \ell$) onder de bijvoorwaarden

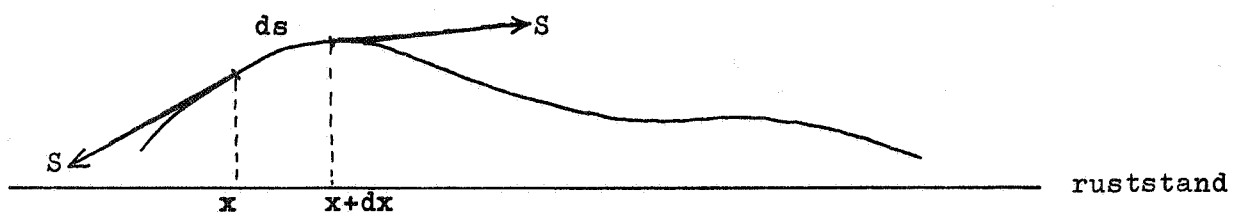
$$U(x, 0) = h(x), \quad U_x(0, t) = U_x(\ell, t) = 0$$

(geïsoleerde eindige staaf).

24. De vergelijking van de trillende snaar

De uitwijking van een snaar uit de evenwichtsstand ter plaatse x op tijdstip t wordt aangegeven door $u(x,t)$. Onderstellingen:

- Elk punt beweegt langs een lijn loodrecht op de snaarrichting in de ruststand.
- In elk punt en op ieder tijdstip bedraagt de snaarspanning S .
- De uitwijkingen zijn zo gering, dat de lengte ds van een stukje snaar in eerste benadering gelijk is aan zijn projectie dx op de ruststand. (Verder dan eerste, lineaire benaderingen gaan we niet.)



Op het stukje ds is de verticale spanningscomponent

$$\begin{aligned} \text{links:} & -S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \\ \text{rechts:} & +S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] \end{aligned}$$

$$\text{Resultante: } S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx.$$

De massa van het stukje ds is ρdx (ρ = soortelijke massa), en heeft een versnelling $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Dus volgens Newton $S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$, of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (24.1)$$

waarbij $c = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$ de golfvoortplantingssnelheid langs de snaar zal blijken te zijn. (24.1) is de zgn. vergelijking van de trillende snaar. Het is een d.v. van het hyperbolische type. (De warmtegeleidingsvergelijking heet wel een parabolische d.v.)

Hulpstelling

Gegeven $f(x,t)$, voldoende glad, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$.

Beschouw de integraal $I(t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t) dx$. Dit is een functie van t via integrand, ondergrens en bovengrens.

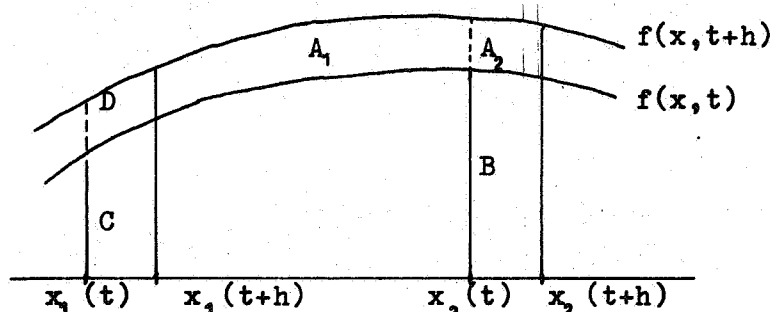
Bewering

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t) dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(x_2,t) \frac{dx_2}{dt} - f(x_1,t) \frac{dx_1}{dt}. \quad (24.2)$$

Bewijs; met de definitie:

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(t+h) - I(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{x_1(t+h)}^{x_2(t+h)} f(x,t+h) dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t) dx \right\}.$$

De accolade splitsen we volgens plaatje:



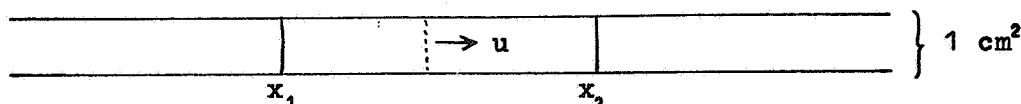
$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \{ \} &= \frac{1}{h} (A_1 + A_2 + B - C) = \frac{1}{h} (A_1 + D) + \frac{1}{h} (A_2 + B) - \frac{1}{h} (C + D) = \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} dx + \frac{1}{h} \int_{x_2(t)}^{x_2(t+h)} f(x,t+h) dx - \frac{1}{h} \int_{x_1(t)}^{x_1(t+h)} f(x,t+h) dx = \\ &\quad (\text{volgens middelwaarde stelling}) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tau) dx + \frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} f(\xi_2, t+h) - \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} f(\xi_1, t+h) \end{aligned}$$

waarbij $t < \tau < t+h$, $x_1(t) < \xi_1 < x_1(t+h)$, $x_2(t) < \xi_2 < x_2(t+h)$.

Nu $h \rightarrow 0$. Resultaat

$$\frac{dI}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx + f(x_2,t) \dot{x}_2 - f(x_1,t) \dot{x}_1. \quad \text{q.e.d.}$$

Tweede afleiding van de golfvergelijking: de trillende luchtkolom (orgelpijp)



Hypothese: de luchtdeeltjes in ééNZelfde doorsnede x hebben op elk tijdstip dezelfde snelheid $u = u(x, t)$. Lokale druk: $p(x, t)$. Lokale dichtheid: $\rho(x, t)$.

We beschouwen één vaste collectie luchtdeeltjes, besloten tussen (uiteraard van t afhankelijke) grenzen x_1 en x_2 , en gaan uit van drie fysische wetten:

a) De continuïteitsvergelijking. De beschouwde hoeveelheid materie is

constant: $\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x, t) dx = 0$. Uitgewerkt volgens de hulpstelling

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho(x_2, t) \dot{x}_2 - \rho(x_1, t) \dot{x}_1 = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + (\rho u)_{x_2} - (\rho u)_{x_1} = 0$$

gedifferentieerd naar x_2 : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x_2} + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right)_{x_2} = 0$, of

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (24.3)$$

b) De traagheidswet. Momentane impulsverandering = uitwendige kracht (inwendige krachten verwaarloosd)

$$\text{Impuls} = \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx; \quad \text{Uitwendige kracht} = p(x_1) - p(x_2).$$

Derhalve volgens de hulpstelling

$$p(x_1) - p(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dx + (\rho u)_{x_2} u(x_2) - (\rho u)_{x_1} u(x_1)$$

gedifferentieerd naar x_2 ; dan $x_2 = x$ genoemd:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}. \quad (24.4)$$

Uit (24.4) leiden we af met (24.3)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Resultaat twee vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

Hypothese: kleine luchtsnelheden u , kleine snelheidsfluctuaties $\frac{\partial u}{\partial x}$, kleine dichtheidsfluctuaties $\frac{\partial \rho}{\partial x}$. Derhalve zijn de termen achter de stippellijn van kleinere (kwadratische) orde. We laten ze weg (linearisering).

- c) De lokale toestandsverandering wordt beheerst door de Poissonformule
 $p(x,t) = A \rho(x,t)^\beta$ A, β constant. Omdat de fluctuaties met x klein worden verondersteld, lineariseren we ook hier

$$\Delta p = \text{Constante} \cdot \Delta \rho. \quad \text{Hier: } \frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Hierdoor gaat (24.4) over in:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial \log \rho}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ - \frac{\partial \log \rho}{\partial x} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

eerste vergelijking naar x , tweede naar t differentiëren levert links hetzelfde. Dus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ook hier wordt de golfvergelijking verkregen.

Opmerking

De longitudinale trilling van een staaf gehoorzaamt niet aan de vergelijking (24.1).

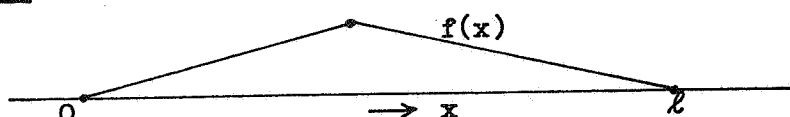
Algemene beschouwingen

De beweging $U(x,t)$ van een snaar is bepaald door

- de golfvergelijking $U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0$
- de beginvoorwaarden $U(x,0) = f(x)$, $U_t(x,0) = g(x)$
- eventuele randvoorwaarden.

Voorbeelden

- 1) de harp



De plaatselijk uit de evenwichtsstand gebrachte snaar wordt op $t = 0$ losgelaten (beginsnelheid nul):

beginvoorwaarden: $U(x,0) = f(x)$, $U_t(x,0) = 0$

randvoorwaarden: $U(0,t) = U(\ell,t) = 0$.



De snaar in ruststand krijgt op $t = 0$ over een zekere lengte $[ab]$ een klap:

beginvoorwaarden: $U(x,0) = 0$, $U_t(x,0) = \begin{cases} C & (a \leq x \leq b) \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

randvoorwaarden: $U(0,t) = U(\ell,t) = 0$.

Oplossingen

We zullen achtereenvolgens bekijken

A de oneindige snaar ($-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$)

B de halfoneindige snaar ($0 \leq x < \infty$, $t \geq 0$)

C de eindige snaar ($0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$).

A. De oneindige snaar

$$\begin{aligned} & U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0) \\ & \begin{aligned} & \text{beginvoorwaarden } U(x,0) = f(x) \\ & U_t(x,0) = g(x) \end{aligned} \end{aligned} \quad (24.6)$$

Oplossing: stel $x - ct = \alpha$, $x + ct = \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Dan is } U_x &= \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = U_\alpha + U_\beta \\ U_{xx} &= U_{\alpha\alpha} + 2 U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta} \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = -c U_\alpha + c U_\beta \\ U_{tt} &= c^2 (U_{\alpha\alpha} - 2 U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta}) \end{aligned}$$

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 4 U_{\alpha\beta} = 0, \text{ dus } \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Dit integreren we naar α

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \text{constant t.a.v. } \alpha, \text{ dus } \frac{\partial U}{\partial \beta} = \phi(\beta)$$

nu integreren naar β : $U = \int \phi(\beta) d\beta + \Phi(\alpha)$

of $U = \Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$
in x en t uitgeschreven:

$$U = \Phi(x-ct) + \Psi(x+ct) \quad (24.7)$$

$\Phi(x-ct)$ is een eenparig met snelheid c naar rechts lopend golfpatroon.
 $\Psi(x+ct)$ is analoog een naar links lopend patroon.
 U is een superpositie van deze twee patronen.

Nu moeten we nog aan de beginvoorwaarden voldoen.

$$\left. \begin{aligned} U(x,0) &= \Phi(x) + \Psi(x) = f(x) \\ U_t(x,0) &= -c \Phi'(x) + c \Psi'(x) = g(x) \end{aligned} \right\}$$

waaruit volgt

$$\Phi' = \frac{1}{2}(f' - \frac{1}{c} g), \quad \Psi' = \frac{1}{2}(f' + \frac{1}{c} g)$$

en na integratie:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + A \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \Phi(x-ct) + \Psi(x+ct) = \\ &= \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \left\{ \int_0^{x+ct} - \int_0^{x-ct} \right\} g(\xi) d\xi + A + B \\ &= \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi + A + B. \end{aligned}$$

$U(x,0) = f(x)$ levert nog $A+B = 0$, zodat de oplossing van (24.6) tenslotte wordt

$$\parallel \quad U(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi. \quad (24.8)$$

(Controleer dat (24.8) inderdaad aan alle voorwaarden van (24.6) voldoet. Denk aan de hulpstelling op PD-232)

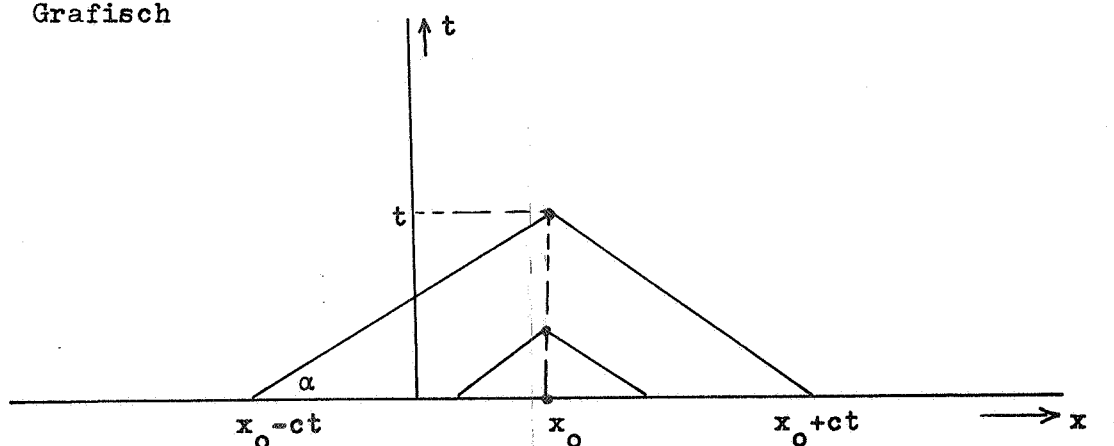
Aan (24.8) zijn enkele typische eigenschappen van de golfvergelijking op te merken:

- 1) De beginuitwijking $f(x_0)$ van de snaar ter plaatse $x = x_0$ is ten tijde t merkbaar in precies twee punten: x_0+ct en x_0-ct . Ieder krijgt precies de helft toegewezen.
- 2) De beginsnelheid $g(x_0)$ van de snaar ter plaatse $x = x_0$ is ten tijde t uitgesmeerd over de uitwijkingen op het interval $[x_0-ct, x_0+ct]$.

Zowel 1) als 2) is in overeenstemming met de in twee richtingen heersende golfvoortplantingssnelheid.

Belangrijk: buiten het interval $[x_0 - ct, x_0 + ct]$ is ten tijde t niets te merken van de beginsituatie in x_0 . Dit in tegenstelling tot de oplossingen van de warmtegeleidingsvergelijking.

Grafisch



De "invloedssfeer" van x_0 ten tijde t is de basis van een gelijkbenige driehoek met vaste basishoeken α , top in (x_0, t) , $\tan \alpha = \frac{1}{c}$.

B. De halfoneindige snaar met vast uiteinde.

$$\begin{aligned} & U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (0 \leq x < \infty, t \geq 0) \\ & \text{beginvoorwaarden } U(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = g(x) \quad (x \geq 0) \\ & \text{randvoorwaarde } U(0, t) = 0 \text{ voor alle } t \end{aligned} \quad (24.9)$$

Oplossing: we gaan de algemene oplossing $U(x, t) = \Phi(x-ct) + \Psi(x+ct)$ (24.7) aanpassen aan de begin- en randcondities. Dit levert weer voor de beginvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + A \quad (x \geq 0) \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + B \quad (x \geq 0) \end{aligned} \quad (24.10)$$

Nu de randvoorwaarde:

$$U(0, t) = \Phi(-ct) + \Psi(ct) = 0 \text{ voor alle } t.$$

Voor alle argumenten y moet dus gelden

$$\Phi(y) = -\Psi(-y). \quad (24.11)$$

Neem $x < 0$, dan is $-x > 0$ en volgens (24.10, 11)

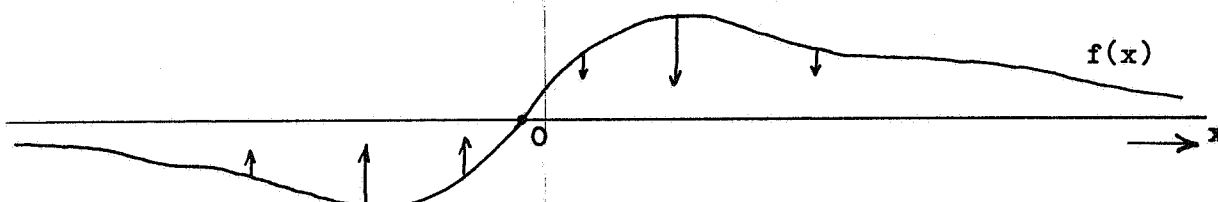
$$\Phi(x) = -\Psi(-x) = -\frac{1}{2} f(-x) - \frac{1}{2c} \int_0^{-x} g(\xi) d\xi + B \quad (\xi = -\eta)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= -\frac{1}{2} f(-x) - \frac{1}{2c} \int_0^x -g(-\eta) d\eta + B \quad (x < 0) \\ \text{analoog} \quad \Psi(x) &= -\frac{1}{2} f(-x) + \frac{1}{2c} \int_0^x -g(-\eta) d\eta + A \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (24.12)$$

Het is nu mogelijk (24.10, 12) in één formule voor alle x samen te vatten, nl. door $f(x)$ en $g(x)$ ook voor negatieve x te definiëren, en wel

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x), \quad g(x) = -g(-x)$$

waarmee we de halfoneindige snaar met vast einde hebben beschreven als helft van een oneindige snaar, waarvan de beginpositie en -snelheid oneven funkties van x zijn.



Grafisch: kromme: beginpositie pijltjes: beginsnelheid.

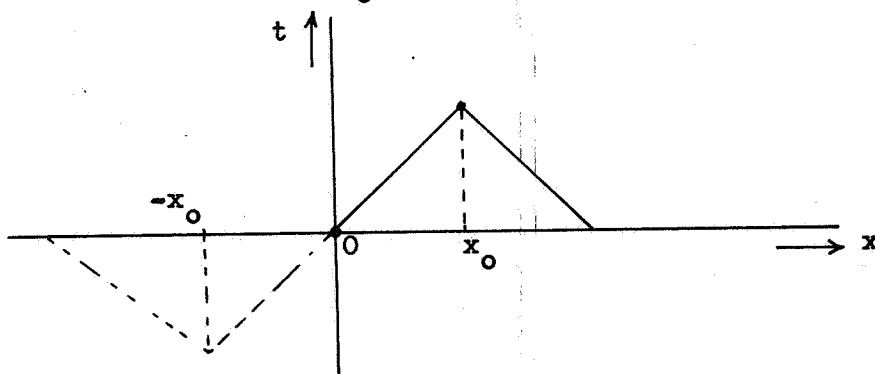
Om tot de uiteindelijke oplossing van (24.9) te komen moeten we nog gebruiken

$$U(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x) \text{ dus } A+B = 0.$$

De oplossing van (24.9) is dus

$$\left\| \begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \\ \text{waarbij} \quad f(-x) &= -f(x), \quad g(-x) = -g(x) \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

Fysische nabeschuwing: bezien we de invloed van beginuitwijking $f(x_0)$ en beginsnelheid $g(x_0)$.



Zodra de invloedssfeer van x_0 het punt 0 passeert, wordt in de half-oneindige snaar de invloedssfeer van $-x_0$ ook merkbaar. De hierbij optredende uitwijkingen zijn tegengesteld aan het effect van x_0 (f en g zijn oneven funkties). Gebruikelijke interpretatie hiervan: een golfpatroon wordt aan een vast uiteinde gespiegeld teruggekaatst. (Reflectieprincipe.)

C. De eindige snaar met vaste eindpunten.

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0)$$

beginvoorwaarden a) $U(x,0) = f(x)$, b) $U_t(x,0) = g(x)$

randvoorwaarden $U(0,t) = U(\ell,t) = 0$ voor alle t (24.14)

We behandelen twee oplossingsmethoden

I met separatie

II met Laplacetransformatie

I. Oplossing van (24.14) met separatie

Stel $U(x,t) = X(x) T(t)$; de golfvergelijking wordt dan

$$X''(x) T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) T''(t) = 0$$

$$\text{of} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \text{constant} = -\lambda^2.$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

$$T'' + (\lambda c)^2 T = 0 \Rightarrow T = D \sin \lambda c t + E \cos \lambda c t$$

aangepast aan de randvoorwaarden:

$$U(0,t) = 0 \text{ voor alle } t \Rightarrow B = 0$$

$$U(\ell,t) = 0 \text{ voor alle } t \Rightarrow \sin \lambda \ell = 0 \Rightarrow \lambda = k\pi/\ell.$$

De elementaire oplossingen, welke voldoen aan de randvoorwaarden, zijn dus

$$U_k(x, t) = \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left(D_k \sin \frac{k\pi ct}{\ell} + E_k \cos \frac{k\pi ct}{\ell} \right). \quad (24.15)$$

Door superpositie van deze vormen construeren we nu de oplossing van (24.14), die voldoet aan de beginvoorwaarden.

$$\text{Stel} \quad U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, t). \quad (24.16)$$

$$\text{a) } U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} = f(x) \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

vermenigvuldig met $\sin \frac{j\pi x}{\ell}$ en integreer van 0 tot ℓ : alles valt weg behalve E_j

$$E_j \cdot \frac{\ell}{2} = \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{j\pi x}{\ell} dx$$

of

$$E_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (24.17)$$

$$\text{b) } U_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot \frac{k\pi c}{\ell} \left(D_k \cos \frac{k\pi ct}{\ell} - E_k \sin \frac{k\pi ct}{\ell} \right)$$

$$U_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{\ell} \cdot D_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} = g(x) \quad (\text{gegeven})$$

$$\frac{j\pi c}{\ell} D_j \cdot \frac{\ell}{2} = \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{j\pi x}{\ell} dx, \quad \text{dus}$$

$$D_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^{\ell} g(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi. \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (24.18)$$

Combinatie van (24.15 t/m 18) levert als oplossing van (24.14)

$$\begin{aligned} U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left\{ \frac{2}{k\pi c} \sin \frac{k\pi ct}{\ell} \int_0^{\ell} g(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\ell} \cos \frac{k\pi ct}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (24.19)$$

Uit de theorie der Fourierreeksen volgt, dat bovenstaande reeks aan de beginvoorwaarden voldoet, mits $f(x)$ en $g(x)$ voldoende tam zijn (bijv. continu), vgl. PD-106.

De hier voorkomende Fourierreeksen zijn sinusreeksen in x op het interval $[0, \ell]$. Hun som stelt voor $-\infty < x < \infty$ een oneven funktie voor, die blijkbaar een periode 2ℓ moet hebben. Laten we derhalve onze oorspronkelijk op $[0, \ell]$ gedefinieerde funkties f en g oneven voortzetten met periode 2ℓ . Daarmee representeert (24.19) een beweging van de oneindige snaar, die aan de beginvoorwaarden $U(x, 0) = f(x)$, $U_t(x, 0) = g(x)$ (voor alle x) voldoet. Als proef op de som laten we nu zien, dat (24.19) ook in de gedaante (24.8) kan worden gebracht.

Bewijs. Uitgangspunten:

$$1) \quad \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi ct}{\ell} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{k\pi}{\ell} (x-ct) + \sin \frac{k\pi}{\ell} (x+ct) \right]$$

$$\sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi ct}{\ell} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{k\pi}{\ell} (x-ct) - \cos \frac{k\pi}{\ell} (x+ct) \right]$$

2) De Fourierstelling (PD-106, 112) voor $f(x)$ en $g(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

(voor alle x dankzij de oneven, periodieke voortzetting)

$$\text{met } b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi, \quad d_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi.$$

Hieruit volgt voor het tweede stuk van (24.19)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi ct}{\ell} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{1}{2} \left[\sin \frac{k\pi}{\ell} (x-ct) + \sin \frac{k\pi}{\ell} (x+ct) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \{ f(x-ct) + f(x+ct) \}, \end{aligned}$$

en voor het eerste stuk van (24.19)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \frac{\ell}{k\pi c} \sin k\pi x \sin k\pi ct &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \frac{1}{2} \frac{\ell}{k\pi c} \left[-\cos \frac{k\pi}{\ell} (x+ct) + \cos \frac{k\pi}{\ell} (x-ct) \right] = \\ &= \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_{x-ct}^{x+ct} \sin \frac{k\pi \eta}{\ell} d\eta = \frac{1}{2c} \int \Sigma \dots = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Opmerking

Ook bij de eindige snaar met vaste eindpunten 0 en ℓ zien we het eerder genoemde reflectieprincipe, zowel bij 0 als bij ℓ , dankzij het oneven periodieke karakter van f en g . Ga dit na!

II. Oplossing van (24.14) met Laplace-transformatie.

$$\text{Als } u(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x,t) dt$$

$$\text{dan is } \int_0^\infty e^{-pt} U_{xx} dt = u_{xx}$$

$$\begin{aligned} \text{en } \int_0^\infty e^{-pt} U_{tt} dt &= \int_0^\infty e^{-pt} dU_t = U_t e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} U_t dt = \\ &= -U_t(x,0) + p \int_0^\infty e^{-pt} dU = -U_t(x,0) - pU(x,0) + p^2 u(x,p). \end{aligned}$$

Derhalve gaat de golfvergelijking met begin- en randvoorwaarden (24.14) over in

$$\left\{ \begin{aligned} u_{xx} - \frac{p^2}{c^2} u &= -\frac{1}{c^2} g(x) - \frac{p}{c^2} f(x) \\ \text{waarbij } u(0,p) &= \int_0^\infty U(0,t) e^{-pt} dt = 0 \text{ en } u(\ell,p) = 0. \end{aligned} \right. \quad (24.20)$$

De Greense functie $G(x,\xi;p)$ van (24.20) moet volgens type A, PD-212 worden gevormd:

$$\left\{ \begin{aligned} G_{xx} - \frac{p^2}{c^2} G &= 0 \quad (x \neq \xi) \\ G(0) &= G(\ell) = 0 \\ G \text{ continu in } x &= \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = \begin{cases} A \sinh \frac{px}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell-\xi) & (x \leq \xi) \\ A \sinh \frac{p\xi}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell-x) & (x \geq \xi) \end{cases}$$

$$G'(\xi^+) = -A \frac{p}{c} \sinh \frac{p\xi}{c} \cosh \frac{p}{c}(\ell-x) \quad (x = \xi)$$

$$G'(\xi^-) = A \frac{p}{c} \cosh \frac{px}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell-\xi) \quad (x = \xi)$$

aftrekken

$$\text{sprong} = -A \frac{p}{c} \sinh \frac{p\ell}{c} = -1 \text{ per definitie.}$$

$$\text{Dus } A = \frac{c}{p \sinh \frac{p\ell}{c}}, \text{ en daardoor}$$

$$G(x, \xi; p) = \frac{c}{p \sinh \frac{p\ell}{c}} \begin{cases} \sinh \frac{px}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell - \xi) & x \leq \xi \\ \sinh \frac{p\xi}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell - x) & x \geq \xi \end{cases} \quad (24.21)$$

Op grond van (23.5A) en de randvoorwaarden van (24.20) vinden we nu ($A = B = 0$)

$$u(\xi, p) = \int_0^\ell G(x, \xi; p) \cdot \left[\frac{1}{c^2} g(x) + \frac{p}{c^2} f(x) \right] dx \quad (24.22)$$

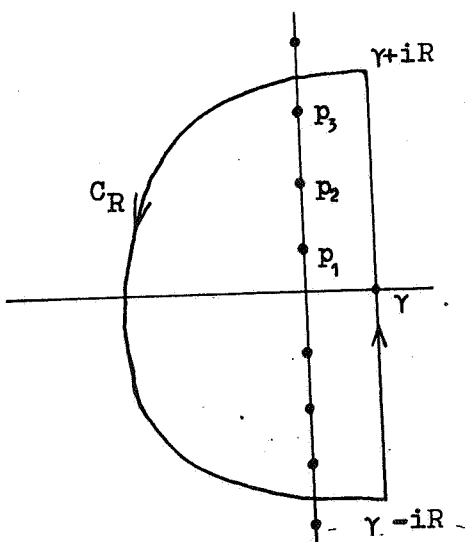
en door de omkeerformule PD-150

$$U(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} u(\xi, p) e^{pt} dp = \frac{1}{c^2} \int_0^\ell g(x) dx \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} G(x, \xi; p) dp \\ + \frac{1}{c^2} \int_0^\ell f(x) dx \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} p e^{pt} G(x, \xi; p) dp. \quad (24.23)$$

We berekenen de p -integralen (zie (24.21)) voor $x < \xi$

$$1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \cdot \frac{c \sinh \frac{px}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell - \xi)}{p \sinh \frac{p\ell}{c}} dp. \quad (24.24)$$

singulariteiten:



$p = 0$ niet (ontwikkel de sinh)

$$\sinh \frac{p\ell}{c} = 0 \Rightarrow \frac{p\ell}{c} = ik\pi, \quad p_k = i \frac{k\pi c}{\ell} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

dus γ moet positief worden genomen.
Neem als contour: verticaal van $\gamma-iR$ naar $\gamma+iR$, afsluiten met linkerhalfcirkel C_R .

Zorg er voor niet te dicht bij een singulariteit te komen.

Pas lemma van Jordan toe.

$$\text{Dan is } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0. \quad (\text{zelf doen!})$$

Dus volgens de residustelling is de uitkomst van (24.24) de som van de residuen der integrand. p_k is enkelvoudige pool, dus (zie (13.17))

$$(\text{Res})_{p_k} = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) e^{pt} \cdot \frac{c \sinh \frac{px}{c} \sinh \frac{p}{c}(\ell - \xi)}{p \sinh \frac{p\ell}{c}}.$$

De limiet is factorsgewijs te nemen, als we combineren

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{\sinh \frac{p\ell}{c}} = \lim_{(p-p_k=\delta) \delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sinh(ik\pi + \frac{\delta\ell}{c})} = (-1)^k \frac{c}{\ell}.$$

Derhalve is

$$\begin{aligned} (\text{Res})_{p_k} &= e^{\frac{ik\pi ct}{\ell}} \frac{c \sinh \frac{ik\pi x}{\ell} \sinh \frac{ik\pi(\ell-\xi)}{\ell}}{\frac{ik\pi c}{\ell}} \frac{c}{\ell} (-1)^k \\ &= \frac{2c}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \cdot e^{\frac{ik\pi ct}{\ell}} \cdot \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Het residu in p_{-k} is

$$(\text{Res})_{p_{-k}} = -\frac{2c}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \cdot e^{-\frac{ik\pi ct}{\ell}} \cdot \frac{1}{2i}.$$

Samengenomen:

$$(\text{Res})_{p_k} + (\text{Res})_{p_{-k}} = \frac{2c}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \sin \frac{k\pi ct}{\ell}.$$

Dit is door symmetrie ook voor $x > \xi$ goed.

De eerste term van (24.23) is dus

$$U_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \cdot \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \sin \frac{k\pi ct}{\ell}.$$

Vergelijk dit met (24.19).

$$2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \frac{c \sinh \frac{px}{c} \sinh \frac{p(\ell-\xi)}{c}}{\sinh \frac{p\ell}{c}} dp. \quad (24.25)$$

De integrand heeft dezelfde singulariteiten als boven. Ook hier is

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$, dus de uitkomst van (24.25) is weer gelijk aan de som

van de residuen in p_k . Met de vorige residuen verschillen deze slechts een factor p_k .

$$\begin{aligned}
 (\text{Res})_{p_k} &= \frac{2c^2}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} e^{\frac{ik\pi ct}{\ell}} \cdot \frac{1}{2} \\
 (\text{Res})_{-p_k} &= \frac{2c^2}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} e^{\frac{-ik\pi ct}{\ell}} \cdot \frac{1}{2} \\
 \hline
 \text{Samen: } &\frac{2c^2}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \cos \frac{k\pi ct}{\ell}.
 \end{aligned}$$

De tweede term van (24.23) is dus

$$U_2(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \cdot \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \cos \frac{k\pi ct}{\ell},$$

in overeenstemming met (24.19).

We beschouwen nu nog de golfvergelijking voor een niet triviale randvoorwaarde:

$$\left\{ \begin{aligned}
 U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} &= 0 & (0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0) \\
 \text{beginvoorwaarden: } &U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0 \\
 \text{randvoorwaarden: } &U(0, t) = f(t)
 \end{aligned} \right. \quad (24.26)$$

Oplossing: Laplacetransformatie naar t levert (zie PD-242) voor

$$u(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, t) dt \text{ de d.v.}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_{xx} - \frac{p^2}{c^2} u &= 0 \quad \text{met randvoorwaarde} \\
 u(0, p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} U(0, t) dt = \bar{f}(p).
 \end{aligned} \right. \quad (24.27)$$

Deze differentiaalvergelijking kunnen we ook wel zonder Greense functie oplossen.

$$\text{Algemene oplossing } u = A e^{-\frac{p}{c}x} + B e^{\frac{p}{c}x}$$

randvoorwaarde in ∞ : begrensdsheid, dus $B = 0$

derhalve $u(0, p) = A = \bar{f}(p)$, waarmee we gevonden hebben $u(x, p) = \bar{f}(p) e^{-\frac{p}{c}x}$.

Het Laplace origineel van $\bar{f}(p)$ is bekend.

Vraag: wat is de invloed van de factor $e^{-\frac{p}{c}x}$
 Oplossing: kunnen we samenvatten in de

Hulpstelling:

Als $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$.

Dan is

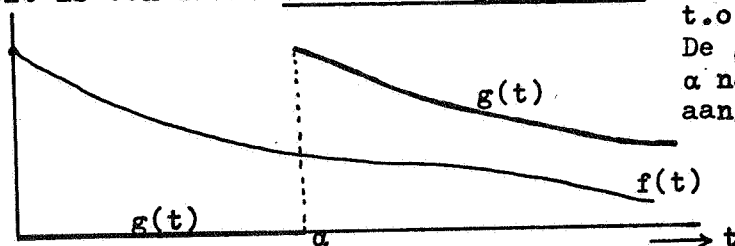
$$\bar{f}(p) \cdot e^{-p\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt, \text{ waarbij}$$

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{als } t < \alpha \\ g(t) = f(t-\alpha) & \text{als } t \geq \alpha \end{cases}.$$

Bewijs

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt &= \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\infty} = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-pt} f(t-\alpha) dt = (\text{noem } t-\alpha = u) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(u+\alpha)} f(u) du = e^{-p\alpha} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-p\alpha} \bar{f}(p). \end{aligned}$$

Dit is een soort verschuivingsstelling, als we de grafiek van $g(t)$ t.o.v. die van $f(t)$ bekijken. De grafiek is in z'n geheel over α naar rechts geschoven en links aangevuld met funktiewaarde nul.



Op grond van deze hulpstelling vinden we als oplossing van (24.26)

$$\| U(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < \frac{x}{c}, \text{ dus } x > ct \\ f(t - \frac{x}{c}) & \text{als } x \leq ct \end{cases} \quad (24.28)$$

Opgaven

1) Los op met Laplacetransformatie de d.v.

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0)$$

$$\text{beginvoorwaarden: } U(x,0) = f(x), \quad U_t(x,0) = g(x).$$

Aanwijzing: $U(x,t)$ wordt begrensd verondersteld.

$$\text{men vindt } G(x,\xi;p) = \frac{c}{2p} e^{-\frac{p}{c}|x-\xi|}.$$

2) Los op de d.v. $U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (x \geq 0, \quad t \geq 0).$

Beginvoorwaarden $U(x,0) = f(x)$, $U_t(x,0) = g(x)$
 randvoorwaarde $U_x(0,t) = 0$ voor alle t .

Leid hieruit een reflectieprincipe af.

Antwoord:

$$U(x,t) = \frac{1}{2} \{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi,$$

waarbij $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$.

- 3) Los op de d.v. $U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0$ ($0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$).

Beginvoorwaarden $U(x,0) = f(x)$, $U_t(x,0) = g(x)$
 randvoorwaarden $U(0,t) = 0$, $U_x(\ell,t) = 0$ voor alle t .

Antwoord:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{\ell} + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{\ell} \right\} \sin\left(k-\frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{\ell}$$

waarbij

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin\left(k-\frac{1}{2}\right) \frac{\pi \xi}{\ell} d\xi; \quad B_k = \frac{2}{(k-\frac{1}{2})\pi c} \int_0^{\ell} g(\xi) \sin\left(k-\frac{1}{2}\right) \frac{\pi \xi}{\ell} d\xi.$$

- 4) Los op de d.v. $U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0$ ($0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$).

Beginvoorwaarden $U(x,0) = U_t(x,0) = 0$ voor alle x
 randvoorwaarden $U(0,t) = f(t)$, $U(\ell,t) = 0$ voor alle t .

Antwoord:

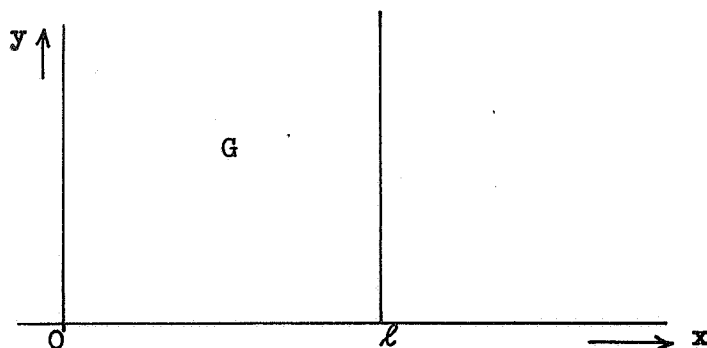
definiëren we $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) & t \geq 0 \end{cases}$, dan is de oplossing:

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(t - \frac{x+2k\ell}{c}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t + \frac{x-2k\ell}{c}\right)$$

25. Varia

In dit hoofdstuk schetsen we enkele zaken, waarvan een diepergaande behandeling buiten het kader van dit college valt.

Als voorbeeld van een elliptische differentiaalvergelijking bezien we de potentiaalvergelijking



$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{aligned} & U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq y < \infty) \\ & \text{met als randvoorwaarden:} \\ & U(0,y) = U(\ell,y) = 0 \quad \text{voor alle } y \\ & U(x,0) = f(x) \end{aligned} \right. \quad (25.1)
 \end{aligned}$$

Opmerking 1

Als we aan $U(x,y)$ voor $y \rightarrow \infty$ regulariteitseisen opleggen (begrensdheid) dan is dit een randwaardeprobleem van Dirichlet (zie PD-60) en heeft de vergelijking een eenduidig bepaalde oplossing.

We proberen dus Laplacetransformatie naar y .

$$u(x,p) = \int_0^\infty e^{-py} U(x,y) dy \quad \text{levert voor } u(x,p) \text{ de d.v.}$$

$$\left\| \begin{aligned} & u_{xx} + p^2 u = p U(x,0) + U_y(x,0) \\ & \text{randvoorwaarden: } u(0,y) = u(\ell,y) = 0 \end{aligned} \right. \quad (25.2)$$

Opmerking 2

Om (25.2) en dus (25.1) tot een oplossing te brengen, moeten we schijnbaar behalve $U(x,0) = f(x)$ ook nog $U_y(x,0)$ gegeven hebben. Dit in strijd met de eenduidigheid van het Dirichletprobleem.

We verliezen de moed niet, gaan dus toch door, en stellen de onbekende functie $U_y(x,0) = \varphi(x)$.

De Greense functie van het probleem (25.2) is van type A (PD-212)

$$\left. \begin{aligned} & G_{xx} + p^2 G = 0 \quad (x \neq \xi) \\ & G(0) = G(\ell) = 0 \\ & G \text{ is continu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(x, \xi; p) = \begin{cases} A \sin px \cdot \sin p(\ell - \xi) & x \leq \xi \\ A \sin p\xi \cdot \sin p(\ell - x) & x \geq \xi \end{cases}$$

$$G'(\xi^+) = -Ap \sin p\xi \cos p(\ell - x) \quad (x = \xi)$$

$$G'(\xi^-) = Ap \cos px \sin p(\ell - \xi) \quad (x = \xi)$$

af trekken

$$\text{Sprong} = -Ap \sin p\ell = -1 \text{ per definitie} \Rightarrow A = \frac{1}{p \sin p\ell}$$

Derhalve

$$G(x, \xi; p) = \frac{1}{p \sin p\ell} \begin{cases} \sin px \sin p(\ell - \xi) & x \leq \xi \\ \sin p\xi \sin p(\ell - x) & x \geq \xi \end{cases} \quad (25.3)$$

Volgens (23.5A) is dus ($A = B = 0$ door de randvoorwaarden)

$$u(\xi, p) = - \int_0^{\ell} G(x, \xi; p) [p f(x) + \varphi(x)] dx \quad (25.4)$$

Voor het terugtransformeren met de omkeerformule (PD-150) geldt:

$$U(\xi, y) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{py} dp \int_0^{\ell} G(x, \xi; p) [p f(x) + \varphi(x)] dx \quad (25.5)$$

De integratieweg voor p moet daarbij alle singulariteiten van de integrand links laten liggen. Bezien we dit voor $x < \xi$.

De functie $G(x, \xi; p) = \frac{\sin px \sin p(\ell-\xi)}{p \sin p\ell}$ heeft geen singulariteit in 0, maar wel enkelvoudige polen, waar $\sin p\ell = 0$, dus in de punten $p_k = \frac{k\pi}{\ell}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Deze polen strekken zich rechts onbegrensd ver uit.

Er bestaat dus zonder meer geen γ voor de omkeerformule!



We nemen onze toevlucht tot een middel, dat misschien aan deze moeilijkheid en aan het bezwaar van opm.2 kan tegemoet komen.

Probeer een $\varphi(x)$ zo. dat de residuen der p -integrand van (25.5) in alle p_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) nul worden.

Opm. Deze residuen zijn integralen over x !

Volgens (13.17) is het residu van $e^{py} \cdot \frac{\sin px \sin p(\ell-\xi)}{p \sin p\ell} (p f(x) + \varphi(x))$ in p_k gelijk aan

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{\sin p\ell} \cdot \frac{1}{p} e^{py} \sin px \sin p(\ell-\xi) \cdot (p f(x) + \varphi(x)) &= \\ = \frac{(-1)^k}{\ell} \cdot \frac{\ell}{k\pi} e^{\frac{k\pi y}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi}{\ell} (\ell-\xi) \left[\frac{k\pi}{\ell} f(x) + \varphi(x) \right] &= \\ = - \frac{1}{k\pi} e^{\frac{k\pi y}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \left[\frac{k\pi}{\ell} f(x) + \varphi(x) \right]. \end{aligned}$$

Het residu van de p -integrand, dat we nul willen hebben, ontstaat hieruit door integratie over x ($0 \leq x \leq \ell$). Dus moet

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left[\frac{k\pi}{\ell} f(x) + \varphi(x) \right] dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

of

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = - \frac{2k\pi}{\ell^2} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (25.6)$$

Anders gezegd: van $\varphi(x)$ schrijven we de fouriercoëfficiënten voor. Hiermee is dan terstond het gehele probleem opgelost, want de uitkomst van (25.5) wordt nu na toepassing van het lemma van Jordan gelijk aan de som der residuen van de p-integrand in de negatieve polen, d.w.z.

$$\begin{aligned} U(\xi, y) &= - \sum_{k=-1}^{-\infty} - \frac{1}{k\pi} e^{\frac{k\pi y}{\ell}} \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} \int_0^{\ell} \left[\frac{k\pi}{\ell} f(x) + \varphi(x) \right] \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} \int_0^{\ell} \left[\frac{n\pi}{\ell} f(x) - \varphi(x) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \text{(zie (25.6))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{2n\pi}{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \end{aligned}$$

$$\parallel U(\xi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (25.7)$$

Opmerkingen.

Dat we alle residuen in de positieve polen nul moesten maken blijkt uit (25.7): een residu in een positieve pool levert een positieve e-macht in deze formule, dus onbegrensdheid, als $y \rightarrow \infty$. Dat we anderzijds geen residuen bij negatieve polen nul konden maken, blijkt reeds uit de afleiding van (25.7). De onbekende functie $\varphi(x)$ is precies geëlimineerd. Controleer, dat $U_y(x, 0)$ wel juist de fouriercoëfficiënten (25.6) heeft.

Om het vertrouwen in de oplossing te geven of te versterken bezien we nu een afleiding met separatie.

Gegeven: $U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad y \geq 0$

met $U(0, y) = U(\ell, y) = 0, \quad U(x, 0) = f(x).$

Stel $U(x, y) = X(x) Y(y) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{constant} = -\lambda^2.$

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ X(0) = X(\ell) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_k = A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\left. \begin{aligned} Y'' - \lambda^2 Y &= 0 \\ Y \text{ begrensd} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_k = e^{-\frac{k\pi y}{\ell}}$$

Algemene oplossing

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k\pi y}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

moet voldoen aan $U(x, 0) = f(x)$, dus

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

vermenigvuldig met $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$, en integreer van 0 tot ℓ ,

$$\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2} \cdot A_n,$$

of

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

m.a.w.

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi y}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi$$

in overeenstemming met (25.7).

Bekijken we nu de vergelijking

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= f(x) & 0 \leq x \leq \ell \\ \text{met de randvoorwaarden} & & v(0) = v(\ell) = 0. \end{aligned} \right. \quad (25.8)$$

Een oplossing met de Greense functie (type A) is mogelijk. Laten we voor de afwisseling een elementaire oplossing kiezen.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= f(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \int_0^x f(\xi) d\xi + A \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x) &= \int_{\eta=0}^x d\eta \int_{\xi=0}^{\eta} f(\xi) d\xi + Ax + B. \end{aligned}$$

Verwisselen we de integratievolgorde (tekenen!)

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\xi=0}^x f(\xi) d\xi \int_{\eta=\xi}^x d\eta + Ax + B = \\ v(x) &= \int_0^x (x-\xi) f(\xi) d\xi + Ax + B. \end{aligned}$$

Aangepast aan de randvoorwaarden:

$$v(0) = B = 0, \quad v(\ell) = \int_0^{\ell} (\ell-\xi) f(\xi) d\xi + A\ell + B$$

resultaat derhalve

$$\ell v(x) = \int_0^x \ell(x-\xi) f(\xi) d\xi - \int_0^{\ell} x(\ell-\xi) f(\xi) d\xi.$$

De laatste integraal splitsen we over $[0, x]$ en $[x, \ell]$ en combineren met de eerste

$$\ell v(x) = - \int_0^{\ell} \xi(\ell-x) f(\xi) d\xi - \int_x^{\ell} x(\ell-\xi) f(\xi) d\xi. \quad (25.9)$$

Vergelijk dit met de uitkomst via Greense funktie.
Kortom, we kunnen schrijven

$$\begin{aligned} & \parallel v(x) = - \int_0^{\ell} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ & \parallel \text{waarbij } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\ell-\xi)}{\ell} & x \leq \xi \\ \frac{\xi(\ell-x)}{\ell} & x \geq \xi \end{cases} \end{aligned} \quad (25.10)$$

Omgekeerd kunnen we bij gegeven $v(x)$ en onbekende $f(x)$ de formule (25.10) opvatten als een integraalvergelijking voor $f(x)$, en wel een integraalvergelijking van de eerste soort. (De onbekende funktie staat alleen onder het integraalteken.)

Een ander geval. We gaan uit van de d.v.

$$\begin{aligned} & \parallel U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0) \\ & \parallel \text{randvoorwaarden: } U(0, t) = U(\ell, t) = 0 \text{ voor alle } t. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Oplossing met separatie. $U = v(x) \cdot T(t)$ geeft

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \text{constant} = -\mu.$$

Voor $v(x)$ leidt dit tot het randwaardeprobleem

$$\begin{aligned} & \parallel \frac{d^2 v}{dx^2} = -\mu v(x) \quad (0 \leq x \leq \ell) \\ & \parallel \text{randvoorwaarden: } v(0) = v(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (25.12)$$

Passen we dezelfde redenering toe als bij het vorige probleem dan komen we weer tot een integraalvergelijking voor $v(x)$, namelijk

$$\begin{aligned} & \parallel v(x) = \mu \int_0^{\ell} G(x, \xi) v(\xi) d\xi \\ & \parallel \text{waarbij } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\ell-\xi)}{\ell} & x \leq \xi \\ \frac{\xi(\ell-x)}{\ell} & x \geq \xi \end{cases} \end{aligned} \quad (25.13)$$

Hier staat de onbekende $v(x)$ zowel onder als buiten het integraalteken. We noemen de vergelijking dan een integraalvergelijking van de tweede soort. Bovendien is in dit geval de vergelijking homogeen.

Hoewel we niet in details kunnen treden, vallen toch enkele specifieke eigenschappen van deze laatste soort vergelijking op.

- 1) Uit een partiële differentiaalvergelijking met randcondities kan, mits aan bepaalde eisen voldaan is, worden afgeleid een integraalvergelijking.
- 2) Vullen we $x = 0$ of $x = \ell$ in (25.13) in. G wordt nul, dus vanzelf $v(0) = v(\ell) = 0$, m.a.w. de randvoorwaarden zitten in de integraalvergelijking zelf ingebouwd.
- 3) $v(x) = 0$ voldoet aan de integraalvergelijking voor alle waarden van μ . (zgn. nuloplossing)
- 4) Vroeger (PD-239) zagen we, dat niet alle μ aanleiding geven tot een oplossing $\neq$ nuloplossing. Hier alleen $\mu = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$ geeft $v(x) = \sin \frac{k\pi x}{\ell}$.

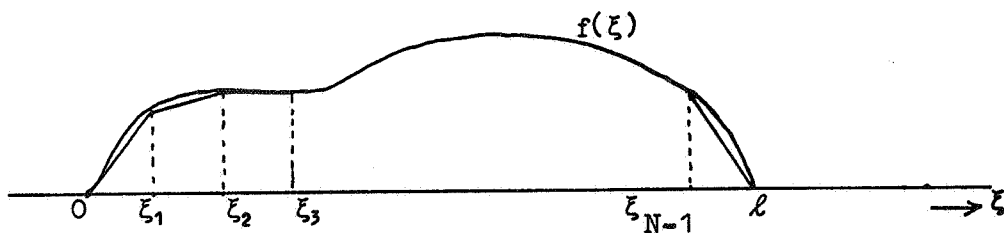
Een dergelijke waarde van μ heet eigenwaarde, de bijbehorende $v(x)$ eigenfunctie van de integraalvergelijking.

- 5) Van belang voor numerieke berekeningen is de sterke verwantschap met eigenwaardeproblemen uit de matrixtheorie:

Laat $G(x, \xi)$ gegeven zijn ($0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq \xi \leq \ell$) en voldoen aan $G(x, 0) = G(x, \ell) = 0$. Beschouw nu de integraalvergelijking

$$v(x) = \mu \int_0^{\ell} G(x, \xi) v(\xi) d\xi. \quad (25.14)$$

We benaderen de integraal met de trapeziumregel. Verdeel $[0, \ell]$ in N gelijke stukjes en beschouw de gebroken lijn door de overeenkomstige punten van de grafiek als benadering voor de functie $G(x, \xi) v(\xi) = f(\xi)$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} v(x) &= \frac{\ell}{N} \cdot \frac{1}{2} [f(0) + 2f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + \dots + 2f(\xi_{N-1}) + f(\ell)] = \\ &= \frac{\ell}{N} [G(x, \xi_1)v(\xi_1) + G(x, \xi_2)v(\xi_2) + \dots + G(x, \xi_{N-1})v(\xi_{N-1})] \end{aligned}$$

omdat $G(x, 0) = G(x, \ell) = 0$.

In het bijzonder vinden we door het invullen van $x = \xi_j$

$$\frac{1}{\mu} v(\xi_j) = \frac{\ell}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G(\xi_j, \xi_k) v(\xi_k) \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (25.15)$$

Noemen we $v(\xi_j)$ ter afkorting v_j en $G(\xi_j, \xi_k)$ analoog G_{jk} dan hebben we te maken met een matrix-eigenwaardeprobleem

$$\sum_{k=1}^{N-1} G_{jk} v_k = \frac{N}{\mu \ell} v_j \quad (j=1, \dots, N-1).$$

De eigenwaarden van de $(N-1)$ bij $(N-1)$ -matrix (G_{jk}) zijn (bij benadering) $\frac{N}{\mu \ell}$, waarbij μ eigenwaarden van de integraalvergelijking zijn. Hoe het approximatieproces precies werkt als $N \rightarrow \infty$ laten we hier buiten beschouwing.

26. Karakteristiekentheorie

We bespreken eerst twee hulpstellingen.

Hulpstelling 1

Gegeven een ruimtekromme K : $\underline{r} = \underline{r}(s)$ (zie PD-6). Dan heeft de raaklijn aan K in het punt P , gelegen op K als parametervoorstelling (parameter λ):

$$\underline{r} = \underline{r}_p + \lambda \left(\frac{d\underline{r}}{ds} \right)_p \quad (\text{zelf bewijzen})$$

Hulpstelling 2

Gegeven een oppervlak S : $z = z(x, y)$ in R_3 . Daarop een punt P . Dan heeft het raakvlak aan S in P als vergelijking:

$$z - z_p = (z_x)_p (x - x_p) + (z_y)_p (y - y_p).$$

Bewijs. Een kromme K op S door P heeft als parametervoorstelling $\underline{r} = (x(s), y(s), z(x(s), y(s)))$, dus zijn raaklijn in P heeft volgens hulpstelling 1 de parametervoorstelling:

$$\begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ z - z_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ z_x \dot{x} + z_y \dot{y} \end{pmatrix}_p$$

Eliminatie van λ , $\dot{x}$ en $\dot{y}$ uit deze betrekking (d.w.z. afzien van enige speciale keuze van K op S en enig punt op de raaklijn) levert

$$(x-x_p)(z_x)_p + (y-y_p)(z_y)_p = z-z_p.$$

Aan deze betrekking voldoet elk punt van elke raaklijn in P aan S, het is dus de vergelijking van het raakvlak in P.

We beschouwen nu de zgn. quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$\begin{cases} a u_x + b u_y = c \\ \text{waarbij } a, b \text{ en } c \text{ van } x, y \text{ en } u \text{ afhangen.} \end{cases} \quad (26.1)$$

Probleem van Cauchy

Zoek de oplossing(en) $u = u(x, y)$ van (26.1) (integraaloppervlakken van (26.1)) die een gegeven kromme K: $\underline{x} = \underline{x}(s)$ bevatten. (De vector $\underline{x}$ geeft weer (x, y, u) .)

Oplossing

De gevraagde oplossing(en) $u = u(x, y)$ heeft in elk punt P van K als raakvlak (hulpstelling 2)

$$u - u_p = (u_x)_p (x - x_p) + (u_y)_p (y - y_p), \quad (26.2)$$

dat de raaklijn $\underline{x} - \underline{x}_p = \lambda \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \right)_p$ (hulpstelling 1) bevat. Substitutie van de laatste vorm in (26.2) moet dus een identiteit in λ opleveren. Voor elk punt van K geldt bij gevolg

$$u_x \cdot \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = \frac{du}{ds} \quad (26.3)$$

maar ook de d.v.

$$u_x \cdot a + u_y \cdot b = c.$$

Uit deze twee lineaire vergelijkingen zijn de twee onbekenden u_x en u_y in het algemeen op te lossen. Meetkundig: we weten in elk punt van K het raakvlak aan ons integraaloppervlak.

Er bestaan echter krommen, waarvoor bovenstaand tweetal vergelijkingen oneindig veel oplossingen heeft, namelijk die krommen K, waarvoor

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{a} = \frac{\frac{dy}{ds}}{b} = \frac{\frac{du}{ds}}{c} \quad (26.4)$$

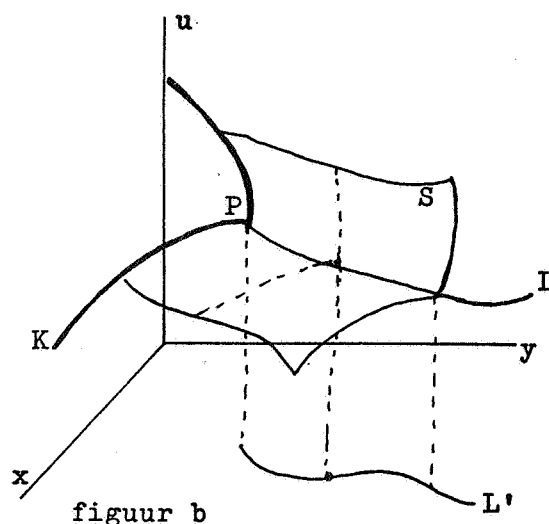
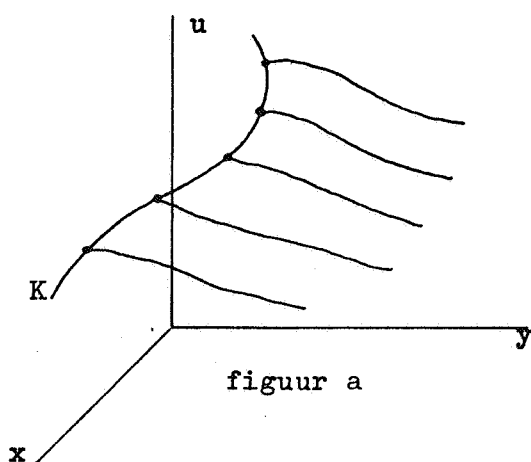
een kromme, die aan deze gewone differentiaalvergelijkingen (26.4) voldoet heet een karakteristiek van (26.1). Meetkundig: elk raakvlak van een karakteristiek is raakvlak van een integraaloppervlak.

Een oppervlak, opgebouwd uit louter karakteristieken is dus integraaloppervlak van (26.1). Uit de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen volgt, dat door elk punt (x, y, u) precies één zo'n karakteristiek

gaat (zie E.L.Ince, Ordinary differential equations, London 1927, p.71). De richting van de raaklijn aan een karakteristiek heet wel karakteristieke richting. In elk punt (x,y,u) is de karakteristieke richtingsvector dus

$$\underline{v}_{\text{kar}} = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)) \quad (26.5)$$

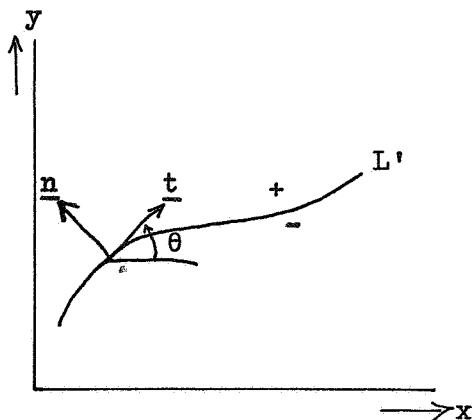
Het probleem van Cauchy voor een kromme K, die in geen enkel punt een karakteristieke richting heeft, kent dus precies één oplossing: Het oppervlak, gevormd door de uit K ontspruitende karakteristieken (zie figuur)



In figuur b zien we, dat een kromme K met een singulariteit P (hoek) aanleiding kan geven tot een integraaloppervlak S met een richel L. Aanschouwelijk verwachten we, dat deze richel een karakteristiek zal zijn.

|| Spraakgebruik: de discontinuïteit van de gegeven kromme loopt langs de bijbehorende karakteristiek verder.

Analytische behandeling. De projectie L' van L op het xy-vlak heeft de eigenschap, dat voor de vergelijking $u = f(x,y)$ van het integraaloppervlak geldt: $\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}$ is discontinu ($\underline{n}$ = normaal op L'), terwijl $\frac{\partial u}{\partial \underline{t}}$ continu is. ($\underline{t}$ = raaklijnvector van L')
We onderzoeken welke krommen L' deze eigenschap hebben.



$$\underline{t} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\underline{n} = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Voor beide zijden van L' geldt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} &= \text{grad } u \cdot \underline{n} = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \\ \frac{\partial u}{\partial \underline{t}} &= \text{grad } u \cdot \underline{t} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

dus $u_x = u_t \cos \theta - u_n \sin \theta$, $u_y = u_t \sin \theta + u_n \cos \theta$,

ingevuld in (26.1), omdat beide zijden van L integraaloppervlak zijn:

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)u_t + (-a \sin \theta + b \cos \theta)u_n^+ = c$$

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)u_t + (-a \sin \theta + b \cos \theta)u_n^- = c$$

aftrekken

$$(-a \sin \theta + b \cos \theta)(u_n^+ - u_n^-) = 0$$

Daar $u_n^+ - u_n^-$ ongelijk nul is moet voor L' in elk punt gelden

$$-a \sin \theta + b \cos \theta = 0, \quad \text{dus} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{b}{a},$$

in overeenstemming met (26.4). L' is dus inderdaad projectie van een karakteristiek en de snijkromme L van de twee integraaloppervlakken is een karakteristiek van (26.1).

Bezien we vervolgens het stelsel quasilineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} au_x + bu_y + cv_x + dv_y = e \\ Au_x + Bu_y + Cv_x + Dv_y = E \end{cases} \quad (26.6)$$

waarbij a, b, c, d, e } gegeven functies van u, v, x, y , en A, B, C, D, E } onbekende functies van x en y zijn.

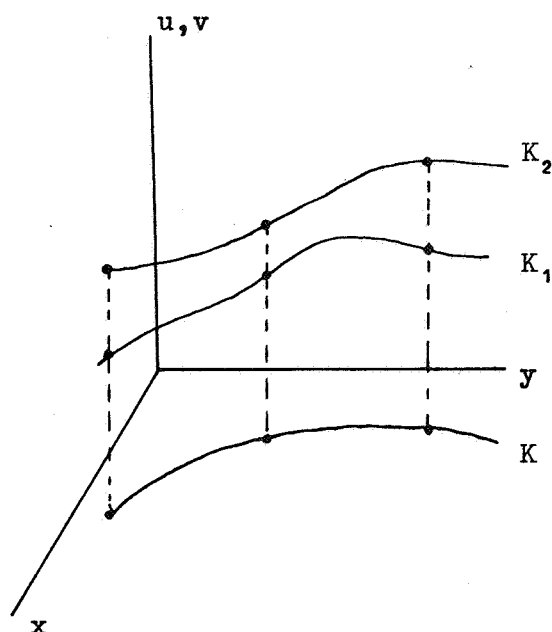
Probleem van Cauchy

Gegeven: een kromme K in het xy -vlak: $x(s), y(s)$; daarop eveneens gegeven de waarden van u en v , dus $u(s), v(s)$.

Gevraagd: een paar functies $u(x,y), v(x,y)$, dat aan (26.6) voldoet en op K de gegeven waarden aanneemt.

Meetkundige interpretatie: in de driedimensionale ruimte (3 assen: één voor x , één voor y , en één voor u en v samen) zijn gegeven twee krommen $K_1: (x(s), y(s), u(s))$ en $K_2: (x(s), y(s), v(s))$, waarvan de projecties op het xy -vlak samen vallen met K .

Gevraagd worden twee oppervlakken $S_1: u = u(x,y)$, en $S_2: v = v(x,y)$ welke voldoen aan (26.6) en resp. K_1 en K_2 bevatten



Oplossing: voor de gezochte functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ geldt, omdat S_1 de kromme K_1 , S_2 de kromme K_2 bevat: $u(x(s), y(s)) = u(s)$ en $v(x(s), y(s)) = v(s)$ (identiek in s). Bij gevolg

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} &= \frac{du}{ds} \\ v_x \frac{dx}{ds} + v_y \frac{dy}{ds} &= \frac{dv}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

maar ook

$$\left. \begin{aligned} u_x a + u_y b + v_x c + v_y d &= e \\ u_x A + u_y B + v_x C + v_y D &= E \end{aligned} \right\}$$

Dit zijn vier lineaire vergelijkingen met vier onbekenden u_x, u_y, v_x, v_y , geldig voor alle punten van K . In het algemeen vinden we hier precies één oplossing, dwz. in elk punt van K_1 , resp. K_2 vinden we precies één raakvlak (zie hulpstelling 2) voor de gezochte integraaloppervlakken S_1 resp. S_2 .

Interessanter is het geval, waarbij (26.7) meer oplossingen heeft. Dit treedt op als de rangen van de onderstaande 4×4 en 4×5 matrices van de coëfficiënten onderling gelijk en minder dan 4 zijn

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 & 0 & \frac{du}{ds} \\ 0 & 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dv}{ds} \\ a & b & c & d & e \\ A & B & C & D & E \end{array} \right) \quad (26.8)$$

(zie Bijl-Salet. Analytische Meetkunde TH Delft 1957, hoofdstuk IV)

Nodig hiervoor is het nulzijn van de 4×4 determinant vóór de stippel-
lijn. Uitgewerkt krijgen we

$$(Ac-aC)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + (aD-Ad+bC-Bc) \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + (Bd-bD)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0 \quad (26.9)$$

of, omdat langs K geldt $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds}$

$$(Ac-aC) y'^2 + (aD-Ad+bC-Bc) y' + (Bd-bD) = 0. \quad (26.10)$$

In elk punt van het xy-vlak bestaan dus voor elke gegeven u en v
waarde twee zgn. karakteristieke richtingen, overeenkomende met de twee
wortels y' uit de vkv. (26.10)

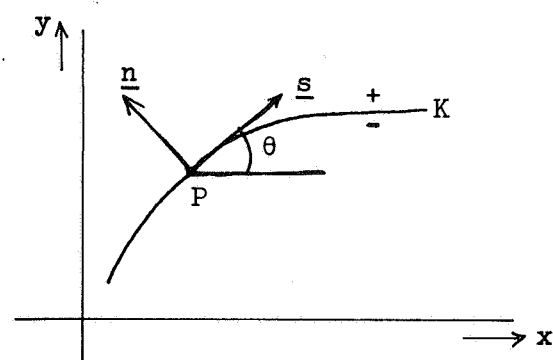
Op grond hiervan noemen we het stelsel (26.6)

hyperbolisch, als de wortels reëel en verschillend zijn
parabolisch, als de wortels gelijk zijn
elliptisch, als de wortels niet reëel zijn.

We zullen nu de nodige voorwaarde (26.10) nog op twee andere manieren
afleiden.

Tweede afleiding van (26.10)

We zoeken naar die krommen K: $x(s)$, $y(s)$ in het xy-vlak, waarop discon-



tinuïteiten in de normale
afgeleiden van u en v beide
mogelijk zijn (vgl. PD-256).
Voer bij het punt P van K een
locaal assenstelsel in volgens
raaklijn aan en normaal op K.
 $\underline{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$,
 $\underline{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Volgens (3.3) is

$$u_s = \frac{\partial u}{\partial \underline{s}} = \text{grad } u \cdot \underline{s} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} = \text{grad } u \cdot \underline{n} = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta$$

waaruit volgt

$$u_x = u_s \cos \theta - u_n \sin \theta$$

$$u_y = u_s \sin \theta + u_n \cos \theta$$

en analoge formules voor v_x en v_y .

Dit vullen we allemaal in bij (26.6).

$$\begin{cases} u_s(a \cos \theta + b \sin \theta) + v_s(c \cos \theta + d \sin \theta) + u_n(-a \sin \theta + b \cos \theta) + \\ \quad + v_n(-c \sin \theta + d \cos \theta) = e \\ u_s(A \cos \theta + B \sin \theta) + v_s(C \cos \theta + D \sin \theta) + u_n(-A \sin \theta + B \cos \theta) + \\ \quad + v_n(-C \sin \theta + D \cos \theta) = E \end{cases} \quad (26.11)$$

Aan weerszijden van K is (26.11) geldig met resp. (u_s, v_s, u_n^+, v_n^+) en (u_s, v_s, u_n^-, v_n^-) . Aftrekken van de overeenkomstige vergelijkingen geeft:

$$\begin{cases} (u_n^+ - u_n^-)(-a \sin \theta + b \cos \theta) + (v_n^+ - v_n^-)(-c \sin \theta + d \cos \theta) = 0 \\ (u_n^+ - u_n^-)(-A \sin \theta + B \cos \theta) + (v_n^+ - v_n^-)(-C \sin \theta + D \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad (26.12)$$

Dit zijn twee homogene lineaire vergelijkingen met twee onbekenden $(u_n^+ - u_n^-)$, $(v_n^+ - v_n^-)$ met een oplossing $\neq (0,0)$. Dus de determinant moet nul zijn.

$$\begin{vmatrix} -a \sin \theta + b \cos \theta & -c \sin \theta + d \cos \theta \\ -A \sin \theta + B \cos \theta & -C \sin \theta + D \cos \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (26.13)$$

Uitgewerkt

$$(aC - Ac)\sin^2 \theta + (Ad - aD + Bc - bC)\sin \theta \cos \theta + (bD - Bd)\cos^2 \theta = 0$$

hetgeen precies overeenkomt met (26.10) omdat $y' = \tan \theta$.

Opmerking 1

Uit (26.12) blijkt, dat de sprongen van u_n en v_n aan K niet onafhankelijk van elkaar gekozen kunnen worden.

Opmerking 2

Anderzijds moeten u_n en v_n aan weerszijden van K nog in overeenstemming met (26.11) kunnen worden gekozen. Brengen we de termen met u_s en v_s uit (26.11) naar het rechterlid, dan ontstaan twee niet-homogene lineaire vergelijkingen in u_n en v_n , waarvan de coëfficiëntendeterminant links volgens (26.13) nul is. De vergelijkingen zijn dan en alleen dan oplosbaar als ze afhankelijk zijn. Nodig en voldoende voor oplosbaarheid van u_n, v_n uit (26.11) is dus (ga dit na)

$$\frac{-a \sin \theta + b \cos \theta}{-A \sin \theta + B \cos \theta} = \frac{-c \sin \theta + d \cos \theta}{-C \sin \theta + D \cos \theta} = \text{extra voorwaarde} \quad (26.13)$$

$$\frac{e - u_s (a \cos \theta + b \sin \theta) - v_s (c \cos \theta + d \sin \theta)}{E - u_s (A \cos \theta + B \sin \theta) - v_s (C \cos \theta + D \sin \theta)}.$$

Hieruit blijkt, dat we u_s en v_s evenmin onafhankelijk van elkaar kunnen kiezen. Dit is trouwens onmiddellijk duidelijk uit de gegeven meetkundige interpretatie.

Derde afleiding van (26.10)

Uitgangspunt. De richtingsafgeleide van een functie $u(x,y)$ in de richting van de eenheidsvector $\underline{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$ is volgens (3.3)

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{s}} = \text{grad } u \cdot \underline{s} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta.$$

Omgekeerd is $u_x a + u_y b = \sqrt{a^2+b^2} (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi)$ als

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a u_x + b u_y$ is dus op een factor na de richtingsafgeleide van u in de richting (a,b) , die een hoek φ met de x -as maakt waarbij $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

Onze uitgangsvergelijkingen (26.6) zijn dus vergelijkingen voor de richtingsafgeleiden van u en v in vier i.h.a. verschillende richtingen. Het zou plezierig zijn, als we voor u en v afgeleiden kregen in de zelfde richting. Dit proberen we te bereiken door lineaire combinatie van de twee vergelijkingen (26.6).

$$\begin{aligned} \lambda(a u_x + b u_y + c v_x + d v_y) + A u_x + B u_y + C v_x + D v_y &= \lambda e + E \\ (\lambda a + A) u_x + (\lambda b + B) u_y + (\lambda c + C) v_x + (\lambda d + D) v_y &= \lambda e + E. \end{aligned}$$

Differentiatierichting voor u : $\tan \varphi = \frac{\lambda b + B}{\lambda a + A}.$

Differentiatierichting voor v : $\tan \varphi = \frac{\lambda d + D}{\lambda c + C}.$

$$\text{Dus moet } \frac{\lambda b + B}{\lambda a + A} = \rho = \frac{\lambda d + D}{\lambda c + C} \quad (26.14)$$

hetgeen een vierkantsvergelijking voor λ oplevert. Interessanter is de vierkantsvergelijking voor ρ die hieruit ontstaat (ρ is de tangens (richtingscoëfficiënt) van de bewuste richting)

$$\rho = \frac{\lambda b + B}{\lambda a + A} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho A - B}{-\rho a + b}$$

$$\rho = \frac{\lambda d + D}{\lambda c + C} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho C - D}{-\rho c + d}$$

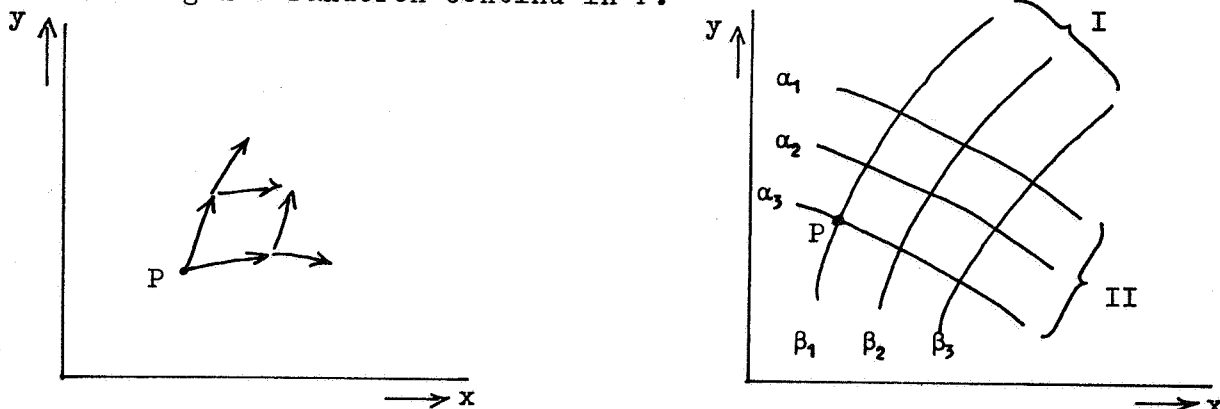
combineren

$$(\rho A - B)(-\rho c + d) - (\rho C - D)(-\rho a + b) = 0.$$

Uitwerking hiervan geeft precies de vierkantsvergelijking (26.10) voor ρ .

Meetkundige beschouwing van de hyperbolische vergelijking

Laat $u(x,y)$, $v(x,y)$ oplossing zijn van (26.6). In elk punt P van het xy-vlak zijn volgens (26.10) twee richtingen karakteristiek. Deze richtingen veranderen continu in P.



We rijen deze richtingen nu aaneen tot twee stelsels krommen. De krommen van stelsel I hebben in elk punt de ene karakteristieke richting, die van stelsel II de andere (Existentiëstelling, waarop we niet nader ingaan).

Het blijkt nu nuttig nieuwe coördinaten (α, β) in te voeren gebaseerd op deze stelsels krommen: α nemen we constant langs elke kromme van stelsel II, β langs elke kromme van stelsel I. Populair gezegd: α "nummert" de exemplaren van II, β die van I. Elk punt P krijgt als coördinaten de α en β van de bijbehorende krommen toegewezen. Hierdoor ontstaat het verband $x = x(\alpha, \beta)$ $y = y(\alpha, \beta)$. α is parameter langs elk exemplaar van I, β langs elke kromme van II. Dus de raaklijnvector aan een kromme van I wordt $(\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha})$. Omdat dit een karakteristieke vector is geldt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \rho_1(u, v, x, y) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \text{analoog } \frac{\partial y}{\partial \beta} &= \rho_2(u, v, x, y) \frac{\partial x}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

waarbij ρ_1 en ρ_2 de wortels van (26.10) zijn.

Nu moeten we (26.6) nog transformeren op de nieuwe coördinaten α en β . Gezien de derde afleiding van (26.10) kunnen we λ_1 en λ_2 invoeren volgens (26.14), zo dat

$$\begin{aligned} \lambda_1 b + B &= \rho_1 (\lambda_1 a + A) \\ \lambda_1 d + D &= \rho_1 (\lambda_1 c + C) \\ \lambda_2 b + B &= \rho_2 (\lambda_2 a + A) \\ \lambda_2 d + D &= \rho_2 (\lambda_2 c + C). \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen we de eerste vergelijking van (26.6) met λ , en tellen we de uitkomst bij de tweede op, dan ontstaat

$$(\lambda_1 a + A)(u_x + \rho_1 u_y) + (\lambda_1 c + C)(v_x + \rho_1 v_y) = \lambda_1 e + E$$

en na vermenigvuldiging met $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, omdat volgens (26.15)

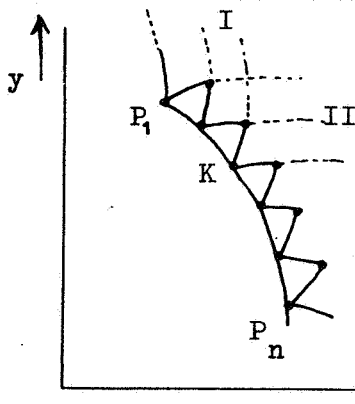
$$u_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \rho_1 u_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} = u_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + u_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} = u_\alpha$$

komt er

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 a + A)u_\alpha + (\lambda_1 c + C)v_\alpha &= (\lambda_1 e + E)x_\alpha \\ \text{en } (\lambda_2 a + A)u_\beta + (\lambda_2 c + C)v_\beta &= (\lambda_2 e + E)x_\beta \end{aligned} \right\} \quad (26.16)$$

Ons gehele probleem komt daardoor neer op het oplossen van (26.15) en (26.16). Een oplossing hiervan zal x , y , u en v geven als functies van α en β . Eliminatie van α en β levert u en v als functies van x en y .

Numerieke oplossingsmethode van (26.6)



Laat gegeven zijn een kromme K , en daarop de waarde van u en v . Op K kiezen we een regelmatig verdeeld aantal punten $P_1, \dots, P_n$

In ieder punt berekenen we de beide karakteristieke richtingen ρ_1 en ρ_2 volgens (26.10).

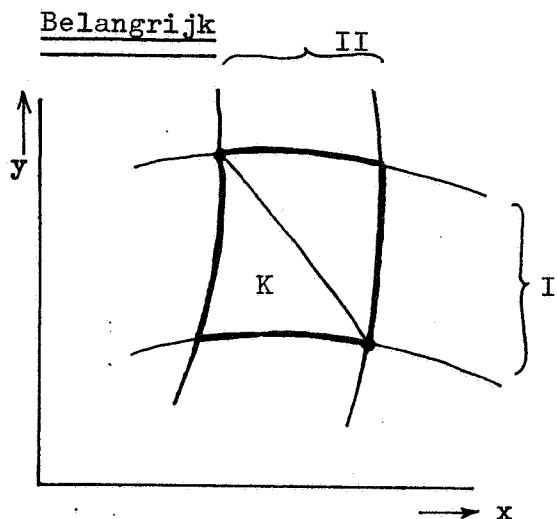
Linearisatie van (26.15):

$$\frac{\Delta y}{\Delta \alpha} - \rho_1 \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} = 0, \quad \frac{\Delta y}{\Delta \beta} - \rho_2 \frac{\Delta x}{\Delta \beta} = 0$$

geeft door elk punt P_k een (lineair benaderd) lijntje van I en een lijntje van II. De snijpunten van de ongelijksoortige lijntjes uit naburige punten van K leveren $n-1$ nieuwe punten (x, y) , waarin volgens linearisatie van (26.16) door

$$\begin{aligned} (\lambda_1 a + A) \frac{\Delta u}{\Delta \alpha} + (\lambda_1 c + C) \frac{\Delta v}{\Delta \alpha} &= (\lambda_1 e + E) \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} \\ (\lambda_2 a + A) \frac{\Delta u}{\Delta \beta} + (\lambda_2 c + C) \frac{\Delta v}{\Delta \beta} &= (\lambda_2 e + E) \frac{\Delta x}{\Delta \beta} \end{aligned}$$

de waarden van u en v worden berekend. Met deze $n-1$ punten voeren we hetzelfde procédé nog eens uit enz.



Dit proces loopt na n stappen af. Principieel kunnen we met de op K gegeven functiewaarden geen uitspraak doen over de functiewaarden in punten gelegen buiten het door de rand-karakteristieken van K begrensde gebied.

Dit is een fundamentele eigenschap van de hyperbolische vergelijking.

Toepassing

De quasilineaire tweede orde vergelijking

$$P \varphi_{xx} + 2 Q \varphi_{xy} + R \varphi_{yy} = T \quad (26.17)$$

waarbij P, Q, R en T functies zijn van x, y, φ_x en φ_y , laat zich herleiden tot een stelsel quasilineaire eerste orde vergelijkingen (26.6).

Noem namelijk $\varphi_x = u$, $\varphi_y = v$. Dan gaat (26.17) over in

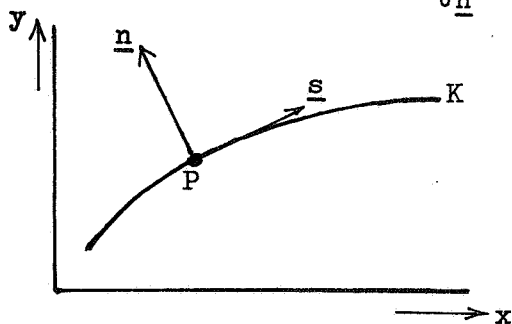
$$P u_x + Q u_y + Q v_x + R v_y = T \quad (26.18)$$

met
$$u_y - v_x = 0$$

De coëfficiënten hangen af van x, y, u en v.

Probleem van Cauchy

Gevraagd: de oplossing $\varphi(x,y)$ van (26.17), welke op de gegeven kromme K: $x(s)$, $y(s)$ (s = booglengte) de gegeven waarde $\varphi(s)$ aanneemt en een gegeven afgeleide $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}(s)$ heeft in de richting van de normaal.



Oplossing

Omdat s booglengte is geldt volgens (3.3)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{s}} = \text{grad } \varphi \cdot \underline{s} = \varphi_x \dot{x} + \varphi_y \dot{y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} = \text{grad } \varphi \cdot \underline{n} = -\varphi_x \dot{y} + \varphi_y \dot{x}$$

De linkerleden zijn op K gegeven (want $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{s}} = \frac{d\varphi(s)}{ds}$), alsmede $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$,

$\dot{y} = \frac{dy}{ds}$, dus kunnen we φ_x en φ_y in de punten van K berekenen. Hiermee

is dit probleem herleid tot het Cauchyprobleem op PD-257. De vergelijking voor de karakteristieke richtingen (26.10) wordt voor (26.17)

$$P(dy)^2 - 2 Q dy \cdot dx + R(dx)^2 = 0 \quad (26.19)$$

Hier onderscheiden we dus:

$Q^2 - PR > 0$	hyperbolische vergelijking
$Q^2 - PR < 0$	elliptische vergelijking
$Q^2 - PR = 0$	parabolische vergelijking

Illustratie

a) de potentiaalvergelijking: $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ is elliptisch
($P = R = 1$, $Q = T = 0$).

b) de snaarvergelijking: $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ is hyperbolisch
($P = 1$, $R = -\frac{1}{c^2}$, $Q = T = 0$).

c) de warmtegeleidingsvergelijking: $u_{xx} = \frac{1}{a} u_t$ is parabolisch
($P = 1$, $Q = R = 0$, $T = \frac{1}{a} u_t$).

Voorbeeld 1

Een halfoneindige snaar in rust wordt op $t = 0$ aan het uiteinde $x = 0$ aan het trillen gebracht:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (x \geq 0, -\infty < t < \infty).$$

Bijvoorwaarden:

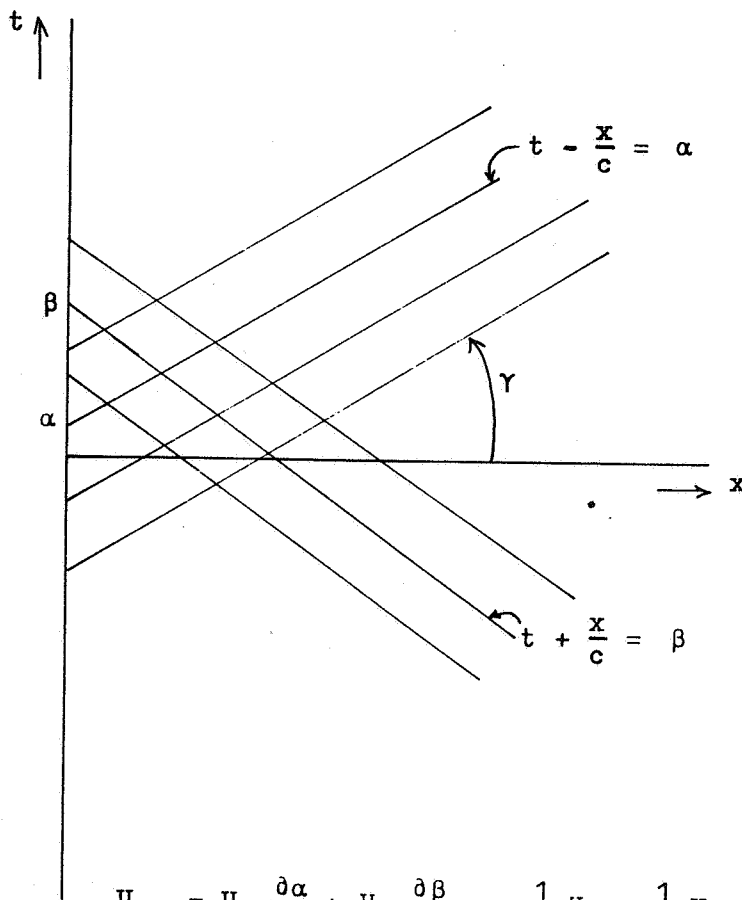
$$U(x,t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \text{ voor alle } x \\ f(t) & t \geq 0, x = 0. \end{cases}$$

Gevraagd: de uitwijking $U(x,t)$ (zie PD-245).

Oplossing: de karakteristieke richtingen worden volgens (26.19) gevonden door

$$dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 = 0.$$

$d(t - \frac{x}{c}) \cdot d(t + \frac{x}{c}) = 0$. Karakteristieken zijn dus $t - \frac{x}{c} = \alpha$
 $t + \frac{x}{c} = \beta$, rechte lijnen in het xt -vlak, die een hoek $\frac{\pi}{4}$ met de x -as maken, $\tan \gamma = \frac{1}{c}$.



We transformeren nu de snaarvergelijking op de coördinaten α en β (zie PD-235, 236).

$$U_x = U_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + U_\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{1}{c} U_\alpha + \frac{1}{c} U_\beta$$

$$U_{xx} = \frac{1}{c^2} (U_{\alpha\alpha} - 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta})$$

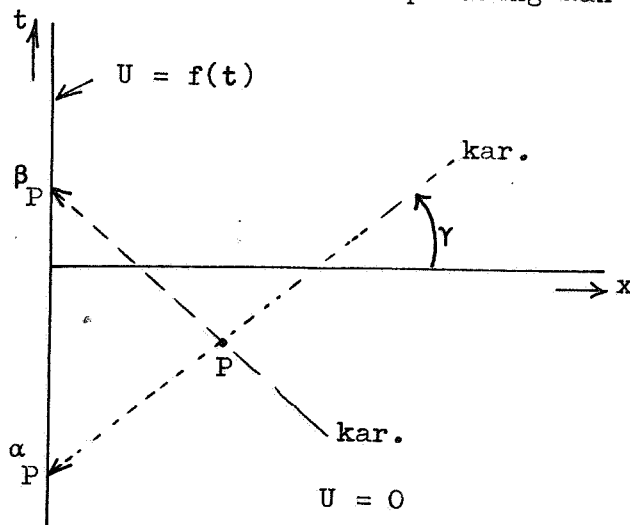
$$\frac{1}{c^2} U_{tt} = \frac{1}{c^2} (U_{\alpha\alpha} + 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta})$$

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = -\frac{4}{c^2} U_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad \text{aftrekken}$$

met algemene oplossing: $U = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)$

$$U = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

We construeren nu de oplossing aan de hand van de grafiek.



Voor een punt P in het vierde kwadrant ($t < 0, x \geq 0$) is blijkbaar (teken de karakteristieken)

$$\varphi(\alpha_P) + \psi(\beta_P) = 0.$$

Variëren we P binnen het vierde kwadrant dan bestrijken α_P en β_P geheel onafhankelijk van elkaar resp. alle negatieve en alle reële getallen, m.a.w.

de eenvoudigste oplossing is:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= 0 && \text{voor alle } \alpha < 0 \\ \psi(\beta) &= 0 && \text{voor alle } \beta.\end{aligned}$$

De oplossing wordt dus $U = \varphi(\alpha)$. Voor positieve α snijdt de karakteristiek $t - \frac{x}{c} = \alpha$ de t -as in α , dus moet $\varphi(\alpha) = U(0, \alpha) = f(\alpha)$ voor $\alpha \geq 0$.

Resultaat:

$$U(x, t) = \begin{cases} 0 & (t - \frac{x}{c} < 0) \\ f(t - \frac{x}{c}) & (t - \frac{x}{c} \geq 0) \end{cases}$$

We behandelen vervolgens enige voorbeelden van de enkele quasilineaire eerste orde vergelijking en de daarmee samenhangende Cauchyproblemen.

Algemene vorm: (zie (26.1))

$$a(x, y, z)z_x + b(x, y, z)z_y = c(x, y, z).$$

Karakteristiekenvergelijking: (zie (26.4))

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} \quad (= \rho ds) \quad \stackrel{\text{def}}{=} d\lambda$$

ρ is een evenredigheidsfactor. ρds noemen we $d\lambda$.

Voorbeeld 2a

Gegeven: de d.v. $az_x + bz_y = c$ a, b, c constant.

Gevraagd: de algemene oplossing.

Oplossing: Uit de karakteristiekenvergelijking volgt

$$\left. \begin{aligned} dx &= a d\lambda \\ dy &= b d\lambda \\ dz &= c d\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

De karakteristieken zijn dus rechte lijnen met vaste richting (a, b, c) . De integraaloppervlakken zijn cylinders met (a, b, c) als richting van de beschrijvende. Cauchyprobleem: het integraaloppervlak door een gegeven kromme K is de cylinder met K als richtkromme, en richting (a, b, c) .

Voorbeeld 2b

Gegeven: de d.v. $(\gamma y - \beta z)z_x + (\alpha z - \gamma x)z_y = \beta x - \alpha y$
 $(\alpha, \beta, \gamma \text{ zijn constant})$

Gevraagd: de algemene oplossing.

Oplossing: volgens de karakteristiekenvergelijking is

$$\begin{cases} dx = (\gamma y - \beta z) d\lambda \\ dy = (\alpha z - \gamma x) d\lambda \\ dz = (\beta x - \alpha y) d\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0 \\ x dx + y dy + z dz = 0 \end{cases}.$$

Na integratie volgt hieruit
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$$

Een karakteristiek ontstaat dus bij doorsnijding van een vlak met normaalvector (α, β, γ) en een bol met middelpunt in de oorsprong. De integraaloppervlakken zijn dus omwentelingsoppervlakken met (α, β, γ) als asvector.

Opmerking: ga na, dat een dergelijk integraaloppervlak kan worden geschreven in de vorm

$$F(\alpha x + \beta y + \gamma z, x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Voorbeeld 2c

Gegeven: de differentiaalvergelijking $\frac{z_x}{x} - \frac{z_y}{y} = 1$.

Gevraagd: de oplossing, welke de kromme K: $(x = s, y = s, z = 0)$ bevat.

Oplossing: de karakteristiekenvergelijking: $x dx = -y dy = dz$ heeft als oplossing
$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 + C_1, \\ z = -\frac{1}{2}y^2 + C_2. \end{cases}$$

Doorsnijding van deze beide oppervlakken levert de karakteristieken. C_1 en C_2 moeten zo worden gekozen, dat de bijbehorende karakteristiek K snijdt

$$C_1 = z - \frac{1}{2}x^2 = 0 - \frac{1}{2}s^2$$

$$C_2 = z + \frac{1}{2}y^2 = 0 + \frac{1}{2}s^2.$$

Dus $\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 - s^2) \\ z = \frac{1}{2}(-y^2 + s^2) \end{cases}$ geeft de karakteristieken die K snijden.

Door eliminatie van s ontstaat: $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

Opgaven

1) Bepaal de algemene oplossing van de d.v.

$$(x-\alpha)z_x + (y-\beta)z_y = z - \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constant})$$

Antwoord: een kegel met top (α, β, γ) .

2) Bepaal de oplossing van de d.v.

$$e^y z_x + z_y = z$$

welke de kromme K: $(x = s, y = 0, z = s^2)$ bevat.

Antwoord: $z = e^y (1 + x - e^y)^2$.

- 3) Bepaal de oplossing van de d.v.

$$z_x \cos z - z_y \sin z = 1$$

welke de z-as bevat.

Antwoord: $(x - \sin z)^2 + (y - \cos z)^2 = 1$.

- 4) Bepaal de oplossing van de d.v.

$$y z_x + x z_y = z$$

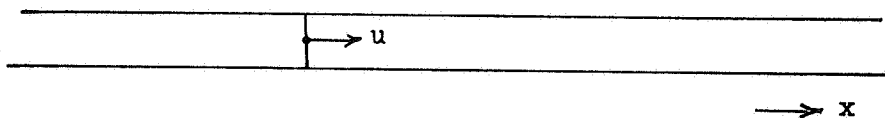
die de kromme K: $(x^2 + y^2 = 1, z = 1)$ bevat.

Antwoord: $\left[\frac{x+y}{z} + (x-y)z\right]^2 + \left[\frac{x+y}{z} - (x-y)z\right]^2 = 1$.

Voorbeeld 3

Stelsels quasilineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm (26.6) spelen in de fysica een zeer belangrijke rol. Als toepassingsgebieden noemen we de gasdynamica, de plasticiteitstheorie en de theorie van de golfverschijnselen in ondiep water (kanalen, Noordzeeprobleem).

We behandelen hier een probleem uit de gasdynamica en gaan daartoe uit van de niet gelineariseerde vergelijkingen (24.5) en de Poissonformule op PD-234 voor een luchtkolom.



Betekenis der symbolen: $u(x,t)$: snelheid der gasdeeltjes ter plaatse x op tijdstip t . $\rho(x,t)$: lokale dichtheid. $p(x,t)$: lokale druk. Hiervoor geldt (zie PD-233, 234)

$$\begin{cases} \rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0 \\ p_x + \rho u_t + \rho u u_x = 0 \end{cases} \quad (24.5) \quad (26.20)$$

$$p = C \rho^\gamma \quad (\text{Poisson})$$

Uit $p = C \rho^\gamma$ volgt $\frac{dp}{d\rho} = C \gamma \rho^{\gamma-1} \stackrel{\text{def}}{=} c^2$. Deze definitie van c^2 impliceert dat c een funktie is van ρ en daardoor van x en t . Gevolg

$$2 \log c = (\gamma-1) \log \rho + D \quad (26.21)$$

$D = \log \gamma C$ is een constante. Met behulp van (26.21) transformeren we nu (26.20).

$$A. \quad \rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\log \rho) + u_x + u \frac{\partial}{\partial x} (\log \rho) = 0.$$

Omdat $\log \rho$ hier alleen gedifferentieerd in voorkomt valt D bij de omwerking geheel weg en komt er

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial t} (\log c) + u_x + \frac{2u}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} (\log c) = 0. \quad (26.22)$$

$$B. \quad p_x + \rho u_t + \rho u u_x = 0 \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} \cdot \rho_x + \rho u_t + \rho u u_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \cdot \frac{1}{\rho} \rho_x + u_t + u u_x = 0 \Rightarrow c^2 \frac{\partial}{\partial x} (\log \rho) + u_t + u u_x = 0.$$

Ook hier valt D bij differentiatie geheel weg, dus

$$\frac{2}{\gamma-1} c^2 \frac{\partial}{\partial x} (\log c) + u_t + u u_x = 0. \quad (26.23)$$

Aangezien $\frac{\partial}{\partial x} (\log c) = \frac{1}{c} c_x$, $\frac{\partial}{\partial t} (\log c) = \frac{1}{c} c_t$, wordt het resultaat uit (26.22) en (26.23)

$$\begin{cases} \frac{2u}{\gamma-1} c_x + \frac{2}{\gamma-1} c_t + c u_x = 0 \\ \frac{2c}{\gamma-1} c_x + u u_x + u_t = 0 \end{cases} \quad (26.24)$$

Dit is een quasilineair stelsel van de vorm (26.6). De karakteristieke richtingen vinden we door lineaire combinatie van de vergelijkingen (26.4) (zie PD-261)

$$\frac{2}{\gamma-1} \{(\lambda u + c) c_x + \lambda c_t\} + \{(\lambda c + u) u_x + u_t\} = 0.$$

Hierin geldt voor de differentiatierichting van c de vergelijking $\tan \varphi = \frac{\lambda}{\lambda u + c}$, analoog voor die van u de relatie $\tan \phi = \frac{1}{\lambda c + u}$.

Beide richtingen moeten overeenstemmen, dus $\frac{1}{\lambda c + u} = \frac{\lambda}{\lambda u + c}$, m.a.w.

$\lambda = \pm 1$. De karakteristieke vereenvoudiging van (26.24) wordt dus verkregen door simpel optellen resp. aftrekken. Resultaat

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 1: & \quad \frac{2}{\gamma-1} \{(u+c)c_x + c_t\} + \{(u+c)u_x + u_t\} = 0 \\ \lambda = -1: & \quad \frac{2}{\gamma-1} \{(u-c)c_x + c_t\} - \{(u-c)u_x - u_t\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26.25)$$

We verkrijgen zodoende het volgende overzicht van de stelsels karakteristieken

Stelsel I ($\lambda=1$)

langs
karakteristiek $\begin{cases} \alpha \text{ variabel} \\ \beta \text{ vast} \end{cases}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u+c}$$

$$t_\alpha = \frac{1}{u+c} x_\alpha$$

$$\frac{2}{\gamma-1} c_\alpha + u_\alpha = 0$$

Stelsel II ($\lambda=-1$)

langs
karakteristiek $\begin{cases} \alpha \text{ vast} \\ \beta \text{ variabel} \end{cases}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u-c}$$

$$t_\beta = \frac{1}{u-c} x_\beta$$

$$\frac{2}{\gamma-1} c_\beta - u_\beta = 0$$

De onderste regel wordt afgeleid door vermenigvuldiging van (26.25) met t_α resp. t_β (zie PD-263).

We zien hieruit dat bij gebruik van α en β als onafhankelijke variabelen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u + \frac{2}{\gamma-1} c \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(u - \frac{2}{\gamma-1} c \right) = 0, \quad \text{m.a.w.}$$

$$\begin{cases} u - \frac{2}{\gamma-1} c = \varphi(\alpha) \\ u + \frac{2}{\gamma-1} c = \psi(\beta) \end{cases} \quad (26.26)$$

Deze betrekkingen laten zich toepassen op het volgende Cauchyprobleem:
In de halfoneindige buis ($x \geq 0$) stellen we

Gegeven: voor $t \leq 0$: $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $c = c_0$, $u = 0$ voor alle x .

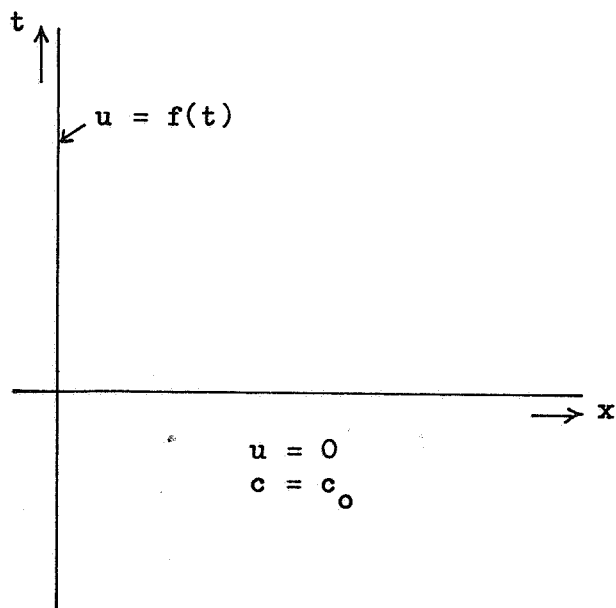
p_0 , ρ_0 en c_0 zijn positieve constanten.

voor $t > 0$: $u(0, t) = f(t)$.

(fysische betekenis: bij het uiteinde van de zich in stationnaire toestand bevindende luchtkolom wordt vanaf het tijdstip $t = 0$ lucht ingeblazen of weggepompt)

Gevraagd: $u(x, t)$ en $c(x, t)$.

Oplossing.



We gaan weer tewerk volgens de grafiek.

a) In het vierde kwadrant, inclusief de randen is $u = 0$, $c = c_0$. Op grond van (26.26) moet voor alle (α, β) waarvan het overeenkomstige punt (x, t) in het vierde kwadrant ligt, gelden.
 $\varphi(\alpha) = \text{constant}$, $\psi(\beta) = \text{constant}$.

b) De karakteristieken van II hebben in het vierde kwadrant, inclusief de randen, als lokale richtingscoëfficiënt

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{II} = \frac{1}{u-c} = -\frac{1}{c_0} = \text{constant}.$$

Het zijn dus voor zover ze in het vierde kwadrant verlopen, rechte, onderling evenwijdige lijnen, van links boven naar rechts onder. Op grond hiervan is het duidelijk, dat alle karakteristieken van II het vierde kwadrant treffen (bij alle α bestaat een β zo dat het met (α, β) corresponderende punt (x, t) in het vierde kwadrant ligt), dus $\varphi(\alpha)$ hangt niet van α af. Volgens (26.26) derhalve

$$u - \frac{2}{\gamma-1} c = \text{constant} = - \frac{2}{\gamma-1} c_0,$$

of, voor alle punten

$$u = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0). \quad (26.27)$$

N.B. Door deze enkele overweging is het verband tussen u en c volkomen vastgelegd!!

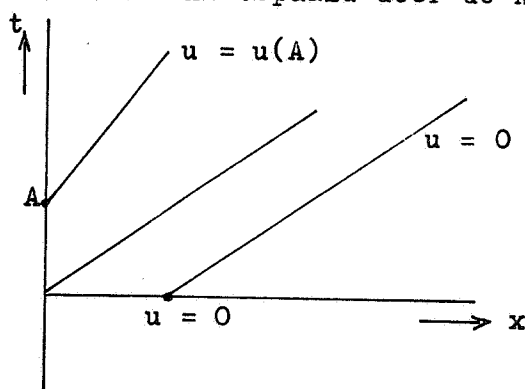
c)

Beschouwen we nu het verloop langs een karakteristiek van I (β vast, α varieert). $u + \frac{2}{\gamma-1} c = \varphi(\beta) \Rightarrow \frac{2}{\gamma-1} (2c - c_0) = \varphi(\beta) = \text{constant}$

omdat β constant wordt gehouden. Kortom: β constant $\Rightarrow c$ constant $\Rightarrow u$ constant (door (26.27)) en dus is ook $u+c$ constant langs een karakteristiek van I. Anderzijds is de lokale richtingscoëfficiënt van zo'n karakteristiek $\left(\frac{dt}{dx}\right)_I = \frac{1}{u+c} = \text{constant}$. Het stelsel I bestaat dus uit

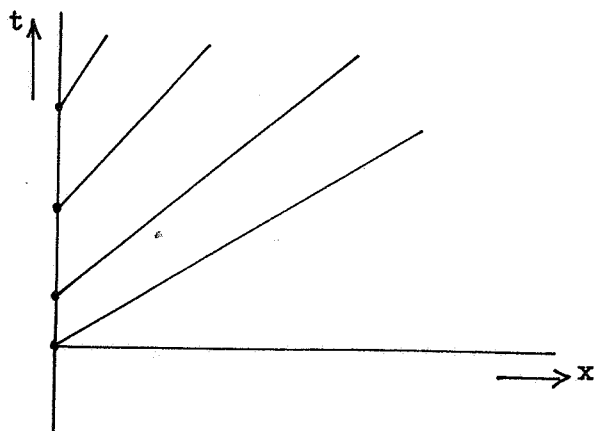
louter rechte lijnen (met mogelijk onderling verschillende richtingen).

Op grond van (26.26) en het feit, dat $\varphi(\alpha) = - \frac{2c_0}{\gamma-1}$ mogen we schrijven $u = \frac{1}{2} \varphi(\beta) - \frac{c_0}{\gamma-1}$. De waarde van u in een willekeurig punt P wordt dus uitsluitend bepaald door de karakteristiek van stelsel I door het punt P.



Slechts die karakteristieken van I zijn interessant, welke door punten A van de positieve t -as gaan. Langs de overige karakteristieken is namelijk $u = 0$.

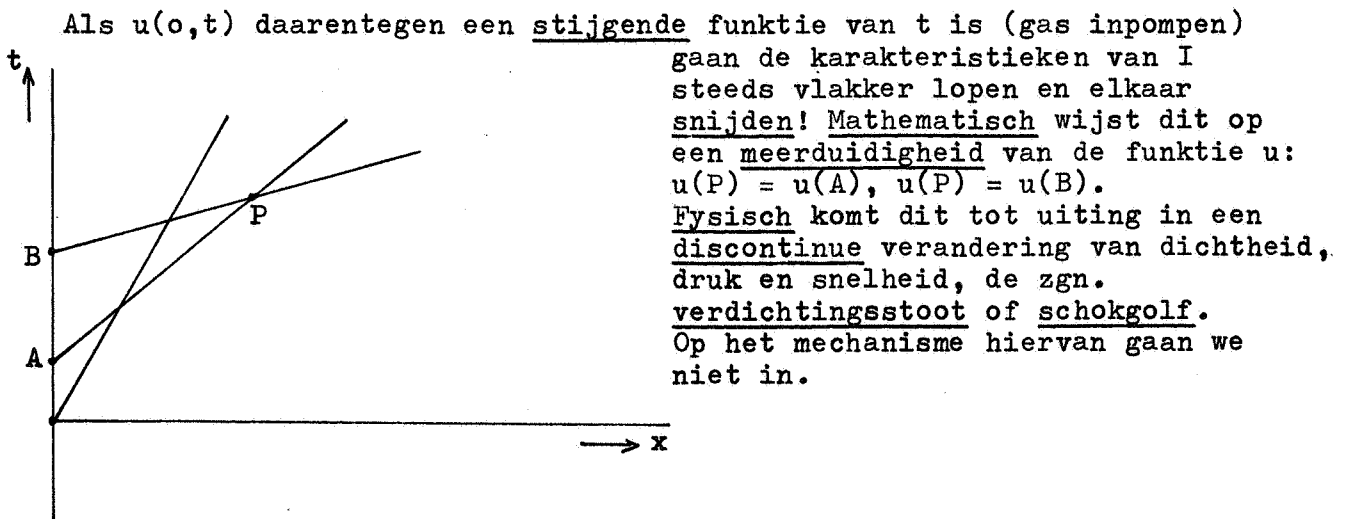
We geven verder een kwalitatieve beschrijving:



Als $u(0, t)$ een dalende functie van t is (er wordt gas weggepompt) stijgt de richtingscoëfficiënt

$$\frac{1}{u+c} = \frac{2}{2c_0 + (\gamma+1)u} \quad (\text{zie (26.27)}) \text{ van}$$

de bijbehorende karakteristieken: Een verdunningsgolf plant zich continu voort in de buis.



27. De golfvergelijking in drie dimensies

De in hoofdstuk 18 reeds afgeleide golfvergelijking (18.5) luidt in drie dimensies voor de functie $u(x,y,z,t)$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \quad (27.1)$$

Speciaal geval

Voor een functie $u(r,t)$, welke alleen van $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en t afhangt, gaat (27.1) over in (zie (7.10))

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

uitgewerkt

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \quad (27.2)$$

De eerste orde term proberen we te verdrijven door te stellen $u(r,t) = R(r) v(r,t)$. Dan is $u_r = R'v + R v_r$, $u_{rr} = R''v + 2R'v_r + R v_{rr}$, $u_{tt} = R v_{tt}$.

Resultaat na substitutie

$$R v_{rr} + (2R' + \frac{2R}{r})v_r + (R'' + \frac{2R'}{r})v - \frac{R}{c^2} v_{tt} = 0.$$

$2R' + \frac{2R}{r} = 0$ als we nemen $R = \frac{1}{r}$. Tevens zien we dat dan

$R'' + \frac{2R'}{r} = + \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0$, dus de oplossingen van (27.2) zijn te

schrijven in de vorm $u = \frac{1}{r} v(r,t)$ waarbij $\frac{1}{r} v_{rr} - \frac{1}{rc^2} v_{tt} = 0$.

$v(r,t)$ voldoet aan de ééndimensionale golfvergelijking (24.1), dus de algemene oplossing van (27.2) wordt volgens (24.7)

$$u(r,t) = \frac{1}{r} [\varphi(r-ct) + \psi(r+ct)]. \quad (27.3)$$

De term $\frac{1}{r} \varphi(r-ct)$ stelt een divergerend (uitdijend) bolsymmetrisch golfpatroon voor, terwijl $\frac{1}{r} \psi(r+ct)$ analoog een convergerend (inkrimpend) golfpatroon is. De amplitude neemt af met $\frac{1}{r}$ (vgl. PD-179), en de golfvoortplantingssnelheid bedraagt c voor beide patronen.

Toepassing: een bolvormige stralingsbron (luidspreker), straal R , zendt golven uit. Aan het oppervlak van de bron bedraagt de golffunctie

$u(R,t) = A e^{i\omega t}$ (harmonische trilling). Bereken $u(r,t)$, als de situatie stationnair is.

Oplossing: volgens de radieel symmetrische oplossing (27.3) is de algemene vorm $u = \frac{1}{r} \varphi(r-ct) + \frac{1}{r} \psi(r+ct) = \frac{1}{r} \Phi(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \Psi(t + \frac{r}{c})$.

Invullen van $r = R$ levert

$AR e^{i\omega t} = \Phi(t - \frac{R}{c}) + \Psi(t + \frac{R}{c})$. Omdat de situatie stationnair wordt verondersteld zullen $\Phi(t - \frac{R}{c})$ en $\Psi(t + \frac{R}{c})$ ook frequentie ω moeten hebben,

dus $\Phi(t - \frac{R}{c}) = B e^{i\omega(t - \frac{R}{c})}$, $\Psi(t + \frac{R}{c}) = C e^{i\omega(t + \frac{R}{c})}$.

Resultaat $AR = B e^{-i\omega \frac{R}{c}} + C e^{i\omega \frac{R}{c}}$, waarin B en C nog bepaald moeten worden. Daartoe is de essentiële fysische voorwaarde:

Stralingsconditie Het convergente golffront is nul.

Dus $C = 0$ (er worden alleen golven uitgezonden), $B = AR e^{i\omega \frac{R}{c}}$ m.a.w.

$$u(r,t) = A \frac{R}{r} e^{i\omega(t - \frac{r-R}{c})}.$$

Opmerking

We kunnen de oplossing ook verkrijgen door te stellen $u = e^{i\omega t} v(r)$, een stationnair radieel golfverschijnsel met frequentie ω . Dit levert voor v de vergelijking van Helmholtz: $\Delta v + \frac{\omega^2}{c^2} v = 0$ waarvan de oplossing (20.5) op PD-179, 180 gevonden is.

Hulpstelling: $v = \frac{e^{-kr}}{r}$ is oplossing van de d.v. $\Delta v = k^2 v$, als

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}. \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ vast.}$$

Bewijs: zelf nagaan.

Beginwaardeprobleem: (vgl. PD-235, geval A)

Gevraagd: de oplossing $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$ van de pdv.

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} = 0; \quad t \geq 0, \quad -\infty < x,y,z < \infty$$

met de beginvoorwaarden:

$$\| \quad \varphi(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad \varphi_t(x,y,z,0) = g(x,y,z).$$

Oplossing: Laplacetransformatie.

Noem $u(x,y,z,p) = \int_0^\infty \varphi \cdot e^{-pt} dt$. Dan is

$$\int_0^\infty (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) e^{-pt} dt = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

$$\int_0^\infty \varphi_{tt} e^{-pt} dt = e^{-pt} \varphi_t \Big|_0^\infty + p e^{-pt} \varphi \Big|_0^\infty + p^2 \int_0^\infty \varphi e^{-pt} dt$$

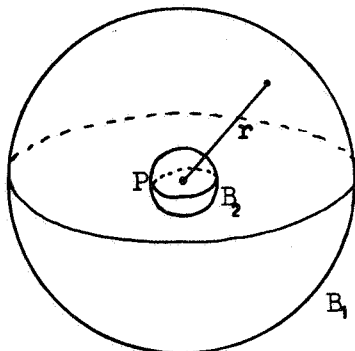
$$= -g(x,y,z) - p f(x,y,z) + p^2 u(x,y,z,p)$$

onder de gebruikelijke begrensdeheidsvoorwaarden voor φ , g en f .

De vergelijking voor u wordt zodoende

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{p^2}{c^2} u = -\frac{1}{c^2} g(x,y,z) - \frac{1}{c^2} p f(x,y,z) \quad (27.4)$$

Kies nu een willekeurig punt $P(\alpha, \beta, \gamma)$, daaromheen een grote bol B_1 straal R , en een klein bolletje B_2 , straal δ . (Later $R \rightarrow \infty$, $\delta \downarrow 0$)



Op het tussenliggende gebied G passen we de tweede stelling van Green toe (zie (11.4)) voor u en de functie v uit de hulpstelling.

$$\iiint_G (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \left(\iint_{B_1} + \iint_{B_2} \right) \left(u \frac{\partial v}{\partial \underline{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} \right) d\sigma. \quad (27.5)$$

Het linkerlid van (27.5) is op grond van (27.4) en de hulpstelling gelijk aan

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left(u \frac{p^2}{c^2} v - v \left[\frac{p^2}{c^2} u - \frac{1}{c^2} g - \frac{p}{c^2} f \right] \right) d\tau = \\ & = \frac{1}{c^2} \iiint_G \frac{e^{-\frac{p}{c}r}}{r} (g(x,y,z) + p f(x,y,z)) d\tau. \end{aligned}$$

De integrand blijft integreerbaar 1) als $R \rightarrow \infty$ door de e -macht, en 2) als $\delta \downarrow 0$ (voer bolcoördinaten om P in).

Links is dus de limiet ($R \rightarrow \infty$, $\delta \downarrow 0$) gelijk aan

$$\frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{p}{c}r}}{r} (g(x,y,z) + p f(x,y,z)) d\tau. \quad (27.6)$$

In het rechterlid wordt de integraal over B_1 beheerst door de negatieve e-macht: limiet nul als $R \rightarrow \infty$. Op B_2 is de normaal naar P toe gericht:

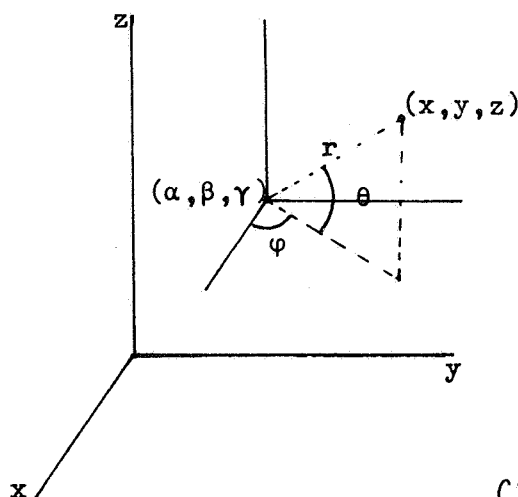
$$\frac{\partial v}{\partial \underline{n}} = - \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{\delta} = \frac{c+p\delta}{c^2} e^{-\frac{p}{c}\delta} = \frac{1}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \text{ Het oppervlak van } B_2 \text{ bedraagt } 4\pi\delta^2, \text{ en de grootte orde van } v \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} \text{ is } \frac{1}{\delta} \text{ omdat } \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} \text{ begrensd is.}$$

$$\text{Derhalve } \lim_{\delta \downarrow 0} \iint_{B_2} (u \frac{\partial v}{\partial \underline{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}) d\sigma = \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\frac{u(P)}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta}\right) \right) 4\pi\delta^2 = 4\pi u(P).$$

Conclusie, als we combineren met (27.5,6)

$$u(\alpha, \beta, \gamma, p) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{p}{c}r}}{r} (g + pf) d\tau. \quad (27.7)$$

Dit schrijven we in bolcoördinaten om P :



$$\left. \begin{aligned} x-\alpha &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y-\beta &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z-\gamma &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} d\tau =$$

$$= r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta$$

(vgl. PD-35)

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$u(\alpha, \beta, \gamma, p) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{p}{c}r} r (g(x,y,z) + pf(x,y,z)) dr.$$

Om hiervan het Laplace-origineel $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, t)$ te bepalen, schrijven we $(x, y, z) = \underline{P} + \underline{r} = \underline{P} + \frac{\underline{r}}{c} \cdot c$ ($\underline{c}$ stelt voor een vector ter lengte c vanuit P in de richting van het integratiepunt (x, y, z)) en berekenen de r -integraal afzonderlijk, inclusief de factor $\frac{1}{c^2}$. (De Laplace-variabele p komt alleen voor in de r -integraal.)

Voor g wordt dit

$$\frac{1}{c^2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-p \frac{r}{c}} r g(x,y,z) dr =$$

$$= \int_{\frac{r}{c}=0}^{\infty} e^{-p \frac{r}{c}} \frac{r}{c} g(\underline{P} + \frac{r}{c} \underline{c}) d \frac{r}{c} =$$

Noem de integratievariabele $\frac{r}{c} = t$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} t g(\underline{P} + t \underline{c}) dt.$$

Dit is per definitie de Laplacegetransformeerde (zie PD-129) van de functie $t g(\underline{P} + t \underline{c})$. De g -term van $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, t) = \varphi(\underline{P}, t)$ wordt dus

$$\varphi_1(\underline{P}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} g(\underline{P} + t \underline{c}) \cos \theta d\varphi d\theta. \quad (27.8)$$

Opmerking

$\underline{P} + t \underline{c}$ doorloopt bij de integratie alle punten van een boloppervlak $B(\underline{P}, ct)$ met straal ct om $\underline{P}$, $\cos \theta d\varphi d\theta$ is een ruimtehoekelement $d\Omega$. De totale ruimtehoek bedraagt 4π , dus

$$\varphi_1(\underline{P}, t) = t \times \text{gemiddelde van } g(x,y,z) \text{ over } B(\underline{P}, ct).$$

Noteren we het gemiddelde (middelwaarde) van $g(x,y,z)$ over het boloppervlak om $\underline{P}$, straal ct met het symbool $M_{\underline{P}, ct}[g]$, dan is dus

$$\varphi_1(\underline{P}, t) = t M_{\underline{P}, ct}[g] \quad (27.9)$$

Nu de f -term

$$\frac{1}{c^2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-p \frac{r}{c}} r p f(x,y,z) dr =$$

noem $\frac{r}{c} = t$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} t p f(\underline{P} + t \underline{c}) dt =$$

$$= - \int_{t=0}^{\infty} t f(\underline{P} + t \underline{c}) d(e^{-pt}) = \quad (\text{partiëel integreren})$$

$$= - t f(\underline{P} + t \underline{c}) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} \frac{d}{dt} \{t f(\underline{P} + t \underline{c})\} dt.$$

De eerste term is nul bij beide grenzen (e -macht voor ∞ , t voor het punt nul), en de tweede per definitie de Laplace-getransformeerde van

$\frac{d}{dt}\{t f(\underline{P} + t\underline{c})\}$ (zie PD-129). Het van f afkomstige bestanddeel van $\varphi(\underline{P}, t)$ bedraagt dus

$$\varphi_2(\underline{P}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d}{dt}\{t f(\underline{P} + t\underline{c})\} \cos\theta \, d\varphi \, d\theta. \quad (27.10)$$

Geheel analoog aan de behandeling van (27.8) kunnen we dit noteren als

$$\varphi_2(\underline{P}, t) = \frac{d}{dt} \{t M_{P,ct}[f]\}. \quad (27.11)$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem op PD-274, 275 ontstaat door samenvoeging van (27.9, 11), dus

$$\varphi(\underline{P}, t) = t M_{P,ct}[g] + \frac{d}{dt} \{t M_{P,ct}[f]\}. \quad (27.12)$$

(Formule van Poisson)

Het is instructief om na te gaan, dat (27.12) aan de beginvoorwaarden voldoet. Uitwerking levert namelijk

$$\varphi(\underline{P}, t) = t M_{P,ct}[g] + M_{P,ct}[f] + t \frac{d}{dt} M_{P,ct}[f]. \quad (27.13)$$

Voor $t = 0$ is de eerste term nul, maar ook de derde omdat f fatsoenlijk is, dwz. $\frac{d}{dt} M[f]$ begrensd blijft. De middelste term is het gemiddelde van f over een boloppervlak, straal 0 om P , dus $f(\underline{P})$. Verder is bij differentiatie van (27.13) naar t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\underline{P}, t) &= M_{P,ct}[g] + t \frac{d}{dt} M_{P,ct}[g] + \\ &+ 2 \frac{d}{dt} M_{P,ct}[f] + t \frac{d^2}{dt^2} M_{P,ct}[f]. \end{aligned} \quad (27.14)$$

Voor $t = 0$ verdwijnen de tweede en de vierde term van (27.14) omdat f en g nette functies zijn. De eerste term wordt precies $g(\underline{P})$. Blijft over de derde term:

Laat (ℓ, m, n) een vector zijn, die het eenheidsboloppervlak S doorloopt bij integratie en $d\sigma$ het oppervlakte element op de eenheidsbol.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{P,ct}[f] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_S f(\alpha + ct\ell, \beta + ctm, \gamma + ctn) c^2 t^2 \, d\sigma \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S c \{ [f_x \ell + f_y m + f_z n](\alpha + ct\ell, \beta + ctm, \gamma + ctn) \} \, d\sigma. \end{aligned}$$

De accolade is gelijk aan de afgeleide van f op het boloppervlak $B(P, ct)$ om P , straal ct in de richting van de normaal (ℓ, m, n) (vgl. (3.3)). Derhalve

$$\frac{d}{dt} M_{P, ct}[f] = c M_{P, ct}\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right].$$

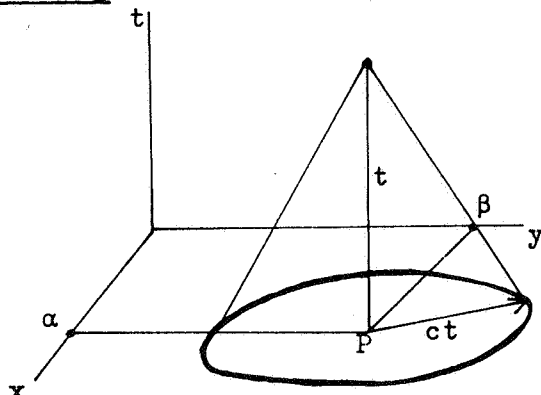
Voor $t \downarrow 0$ gaat dit over in

$c \times$ het gemiddelde van alle richtingsafgeleiden in P

Omdat in elk paar diametraal tegengestelde richtingen in P de richtingsafgeleiden tegengesteld zijn (formule $\frac{\partial f}{\partial \underline{n}} = -\frac{\partial f}{\partial (-\underline{n})}$) is dit gemiddelde nul. Van (27.14) blijft dus voor $t = 0$ over

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\underline{P}, t)\right)_{t=0} = g(\underline{P}).$$

Opmerking naar aanleiding van de Poissonformule (27.12)



Nota bene:

het plaatje is (2+1) dimensionaal getekend, maar (3+1) dimensionaal gedacht!

Alle gemiddelden, welke bijdragen tot $\varphi(\underline{P}, t)$ worden genomen over de beginsituatie op het boloppervlak met straal ct om P . Op het tijdstip t is voor de waarde van φ in het punt P de beginsituatie binnen en buiten dit boloppervlak irrelevant. Dit hangt samen met het beginsel van Huygens en is specifiek voor de drie-dimensionale ruimte. Vergelijk de opmerkingen onderaan PD-236.

Het gemiddelde van een functie $\varphi(x, y, z)$ (geen t !) over een boloppervlak B om een vast punt $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, straal r , is een functie van r . In formule: $M_{P, r}[\varphi] =$ functie van r .

Bewering: $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow M_{P, r}[\varphi] = \text{constant} = \varphi(\underline{P})$.

Bewijs: neem eenheidsboloppervlak S , eenheidsintegratievector (ℓ, m, n) . Dan is

$$M_{P, r}[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi(\alpha + r\ell, \beta + rm, \gamma + rn) d\sigma$$

$$\frac{d}{dr} M_{P, r}[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{[\varphi_x \ell + \varphi_y m + \varphi_z n](\alpha + r\ell, \beta + rm, \gamma + rn)\} d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_B \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\sigma = \\
&\qquad\qquad\qquad \text{zie (11.1)} \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_G \Delta \varphi d\tau = 0 \text{ volgens gegeven}
\end{aligned}$$

dus $M_{P,r}[\varphi] = \text{constant}$; $r \rightarrow 0$ levert precies $\varphi(P)$.
 Deze stelling is ook reeds op PD-61 bewezen.

Gevolgen

- 1) Als $\Delta \varphi = 0$ in een gebied, dan liggen de extremen van φ op de rand.
- 2) De vergelijking $\Delta \varphi = 0$ in een gebied, waarbij φ op de rand wordt voorgeschreven, heeft niet meer dan één oplossing (eenduidigheid van Dirichlet-probleem).

Ga dit zelf na, of kijk op PD-62.

Afleiding van de Poissonformule (27.12) met behulp van middelwaarde-vorming.

Recapitulatie van ons beginwaardeprobleem (PD-274)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Gezocht:} & \varphi(x,y,z,t) \quad -\infty < x,y,z < \infty, \quad t \geq 0 \\ \text{zo dat} & \Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} \\ \text{alsmede} & \varphi(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad \varphi_t(x,y,z,0) = g(x,y,z). \end{array} \right.$$

Oplossing. Zij $\varphi(x,y,z,t)$ oplossing van ons probleem. Bij vaste $P(\alpha, \beta, \gamma)$ is $M_{P,r}[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} M(r,t) = \text{functie van } r \text{ en } t$. Volgen we de redenering op PD-279 opnieuw, dan is in ons nieuwe geval

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_G \Delta \varphi d\tau$$

waarbij wordt geïntegreerd over een bol G om P , straal r .
 Volgens gegeven wordt dit

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_G \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} d\tau.$$

Omdat het integratiegebied niet van t afhangt, mogen we de dubbele differentiatie naar t voor de integraal schrijven

$$r^2 \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_G \varphi d\tau.$$

In bolcoördinaten:
$$\begin{cases} x = \alpha + \rho \cos \theta \cos \xi \\ y = \beta + \rho \cos \theta \sin \xi \\ z = \gamma + \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$r^2 \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\rho=0}^r d\rho \int_{\theta=-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \int_{\xi=0}^{2\pi} \varphi(x,y,z) \rho^2 \cos \theta d\xi d\theta.$$

Differentiatie naar r (r staat rechts alleen in de bovengrens van de eerste integraal)

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial M}{\partial r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_{\theta} \int_{\xi} \varphi(x,y,z)_{(\rho=r)} r^2 \cos \theta d\xi d\theta \right\}$$

$r^2 \cos \theta d\xi d\theta$ is oppervlakte element op een bol met straal r , dus

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial M}{\partial r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} 4\pi r^2 M_{P,r}[\varphi]$$

waaruit na vereenvoudiging als vergelijking voor M resulteert

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial M}{\partial r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}. \quad (27.15)$$

De algemene oplossing hiervan bepaalden we op PD-273, 274.

$$\begin{cases} M(r,t) \equiv \frac{1}{r} (F(\xi) + G(\eta)) \\ \text{met } \xi = r-ct, \eta = r+ct \end{cases} \quad (27.16)$$

Aan de hand van de beginvoorwaarden moeten we nu de functies F en G nog bepalen

$$r M(r,t) \equiv F(\xi) + G(\eta). \quad (27.17)$$

1) Nemen we eerst $r = 0$, t variabel:

$$0 \equiv F(-ct) + G(ct).$$

N.B. Deze en volgende betrekkingen gelden identiek in de genoemde variabele argumenten. Dus $F(\xi) \equiv -G(-\xi)$, en daarmee ontstaat

$$\begin{cases} r M(r,t) \equiv G(\eta) - G(-\xi) \\ \text{met } \xi = r-ct, \eta = r+ct \end{cases} \quad (27.18)$$

2) We differentieren (27.18) naar r

$$M + r \frac{\partial M}{\partial r} \equiv G'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial r} - G'(-\xi) \frac{\partial(-\xi)}{\partial r}$$

na uitwerking wordt dit

$$M + r \frac{\partial M}{\partial r} \equiv G'(\eta) + G'(-\xi). \quad (27.19)$$

3) Nu differentieren we (27.18) naar t

$$r \frac{\partial M}{\partial t} \equiv G'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} - G'(-\xi) \frac{\partial(-\xi)}{\partial t}$$

waaruit we concluderen

$$\frac{r}{c} \frac{\partial M}{\partial t} \equiv G'(\eta) - G'(-\xi). \quad (27.20)$$

Samenvoeging van (27.19, 20) geeft

$$M + r \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{r}{c} \frac{\partial M}{\partial t} \equiv 2 G'(\eta). \quad (27.21)$$

Stellen we vervolgens in (27.19) $r = 0$, t variabel

$$M(0, t) \equiv 2 G'(ct). \quad (27.22)$$

Tenslotte nemen we in (27.21) $t = 0$, r variabel

$$M(r, 0) + r \frac{\partial M}{\partial r}(r, 0) + \frac{r}{c} \frac{\partial M}{\partial t}(r, 0) \equiv 2 G'(r). \quad (27.23)$$

Alle formules zijn identiek in de variabele argumenten.

Combinatie van (27.22, 23) levert daarom

$$M(0, t) \equiv M(ct, 0) + ct \frac{\partial M}{\partial r}(ct, 0) + t \frac{\partial M}{\partial t}(ct, 0). \quad (27.24)$$

Dit is de Poissonformule: Links staat voor een willekeurig tijdstip t het gemiddelde van φ op een boloppervlak, straal 0 , om P , dus $\varphi(P, t)$. Rechts worden alle gemiddelden beschouwd ten tijde nul over een bol met straal ct om P . Nader uitgewerkt volgens de definitie van $M(r, t)$ op PD-280:

$$M(ct, 0) = M_{P, ct}[\varphi(x, y, z, 0)] = M_{P, ct}[f]$$

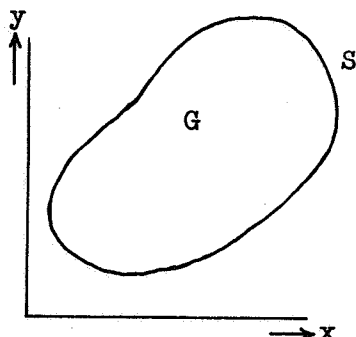
$$ct \frac{\partial M}{\partial r}(ct, 0) = ct \frac{\partial}{\partial r} \{M_{P, ct}[\varphi(x, y, z, 0)]\} = ct M_{P, ct} \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]$$

$$t \frac{\partial M}{\partial t}(ct, 0) = t \frac{\partial}{\partial t} \{M_{P, ct}[\varphi(x, y, z, 0)]\} = t M_{P, ct}[g].$$

Opmerking. Het verdient aanbeveling de betekenis van alle formules op de voorgaande bladzijden minutieus na te gaan. Er liggen vele voetangels en klemmen: wat betreft de laatste twee formules:

|| Als $M = M(r, t)$, dan wil $\frac{\partial M}{\partial r}(a, b)$ zeggen: Differentieer M naar de eerste variabele (r), en vul daarna (a, b) in. Analoog $\frac{\partial M}{\partial t}(a, b)$.

28. Het probleem van Dirichlet in twee dimensies



Gegeven: in het platte vlak een gebied G met randkromme S .
Op S is een functie f gedefinieerd.

Gevraagd: een functie $\varphi(x,y)$, die voldoet aan

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \text{ in } G, \text{ zo dat}$$

$$\varphi = f \text{ op } S. \quad (28.1)$$

Opmerking. De eenduidigheid van de oplossing zagen we reeds eerder (PD-70). We geven nog een ander bewijs.

Eenduidigheidsbewijs

Stel φ_1 en φ_2 voldoen beide aan (28.1)

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\varphi_1 = 0 \text{ in } G, \quad \varphi_1 = f \text{ op } S \\ \Delta\varphi_2 = 0 \text{ in } G, \quad \varphi_2 = f \text{ op } S \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \text{ in } G \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \text{ op } S. \end{array} \right.$$

Noem $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$. Pas (12.5) toe op het vectorveld $\underline{v} = \psi \text{ grad } \psi$.

Dus $\text{div } \underline{v} = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi(\psi_{xx} + \psi_{yy})$. Volgens (12.5)

$$\iint_G (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi\Delta\psi) \, dx \, dy = \int_S \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds$$

wordt hier

$$\left. \begin{array}{l} \iint_G (\psi_x^2 + \psi_y^2) \, dx \, dy = 0 \\ \text{vanzelfsprekend} \\ \psi_x^2 + \psi_y^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi_x = \psi_y = 0 \Rightarrow \psi \text{ constant} \\ \text{dus } \psi = 0 \text{ op } S \text{ en op } G. \end{array} \right.$$

De Dirichlet-integraal $I[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \, dx \, dy$ heeft een fysische betekenis.

Toelichting. Als φ een snelheidspotentiaalveld is van een incompressibele vloeistof met dichtheid 1, dan is $I[\varphi]$ een maat voor de door G omsloten (kinetische) energie.

Uiteraard is voor alle φ de uitdrukking $I[\varphi] \geq 0$.
Het zou dus interessant kunnen zijn, als we een functie φ hadden met $\varphi = f$ op S , en $I[\varphi]$ minimaal.

Stelling Als $\varphi = f$ op S en voor elke functie χ met $\chi = f$ op S geldt $I[\chi] \geq I[\varphi]$.

Dan voldoet φ aan de vergelijking $\Delta\varphi = 0$ in G .

Bewijs. Noem $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi = 0$ op S .

$$I[\varphi + \varepsilon \phi] = I[\varphi] + 2\varepsilon \iint_G (\varphi_x \phi_x + \varphi_y \phi_y) dx dy + \varepsilon^2 I[\phi].$$

Dit kan alleen voor elke λ (dus elke ε en elke ϕ) groter zijn dan $I[\varphi]$, wanneer voor elke ϕ ($\phi = 0$ op S) geldt

$$I(\varphi, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_G (\varphi_x \phi_x + \varphi_y \phi_y) dx dy = 0.$$

$$\begin{aligned} I(\varphi, \phi) &= \iint_G \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \phi dx dy = \\ & \quad \text{zie (12.15)} \\ &= \int_S \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \iint_G \phi \Delta \varphi dx dy = - \iint_G \phi \Delta \varphi dx dy = 0. \end{aligned}$$

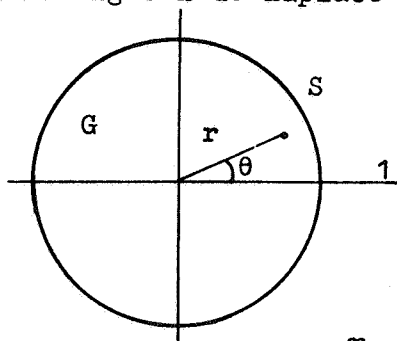
Zou nu $\Delta \varphi$ in een punt $Q \in G$ een positieve waarde p hebben, dan is $\Delta \varphi > \frac{1}{2}p$ in een klein cirkeltje om Q heen (continuïteit van $\Delta \varphi$). Kies ϕ nu positief in, nul buiten dit cirkeltje. Daarmee $\iint_G \phi \Delta \varphi > 0$,

tegenspraak. Analoog als $\Delta \varphi$ ergens negatief is. Dus $\Delta \varphi = 0$ in G . q.e.d.

|| Het Dirichletprobleem heeft dus die functie als oplossing, welke de Dirichlet-integraal minimaliseert.

Historische opmerking: vóór de onderzoeken van Hadamard was men gelukkig met deze uitspraak. Hadamard evenwel construeerde een functie φ , welke het Dirichletprobleem oplost, maar waarvoor $I[\varphi]$ divergeert ($I[\varphi] = \infty$).

Op grond van (13.6) is $\text{Re}(z^n) = r^n \cos n\theta$, alsmede $\text{Im}(z^n) = r^n \sin n\theta$ oplossing van de Laplace-vergelijking $\Delta \varphi = 0$ (r en θ poolcoördinaten).



$$\text{Als nu} \quad f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

een functie met uniform convergente Fourierontwikkeling is, dan voldoet

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta) \quad (28.2)$$

in het gebied G binnen de eenheidscirkel S eveneens aan de Laplace-vergelijking, en neemt op S precies de waarde f aan. We berekenen de Dirichlet-integraal van φ over G .

$$I[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = \iint_G |\text{grad } \varphi|^2 dx dy =$$

zie (12.17)

$$= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta^2 \right) r \, dr \, d\theta.$$

$$\begin{cases} \varphi_r = \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n r^{n-1} \cos n\theta + n b_n r^{n-1} \sin n\theta) \\ \frac{1}{r} \varphi_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n r^{n-1} \sin n\theta + n b_n r^{n-1} \cos n\theta). \end{cases}$$

Uitwerking van $\varphi_r^2 + \left(\frac{1}{r} \varphi_\theta\right)^2$ en integratie over θ (zie PD-104) levert

$$\begin{aligned} I[\varphi] &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) n^2 \cdot 2 \int_0^1 r^{2n-1} \, dr \\ I[\varphi] &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (28.3)$$

Voorbeeld van Hadamard (zie Historische opmerking PD-285).

Kies $\varphi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^{m!} \cos m!\theta$ waarbij $c_m \sim \frac{1}{m^2}$. De reeks convergeert uitstekend op eenheidscirkel met rand, en voldoet aan de Laplace-vergelijking binnen de eenheidscirkel. Evenwel is de Dirichlet-integraal (28.3)

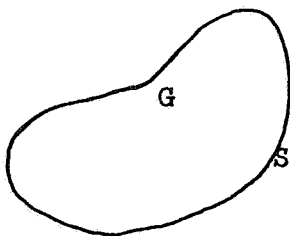
$$I[\varphi] = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m! c_m^2 \sim \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m!}{m^4} = \infty.$$

Opmerking. De randfunctie $\varphi(1, \theta) = f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos m!\theta$ "krinkelt"

door de frequenties $m!$ zo sterk met een relatief zo grote amplitude $c_m \sim \frac{1}{m^2}$, dat daardoor de Dirichlet-integraal niet kan convergeren.

Op een kleinere cirkel ($0 \leq r < 1-\delta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) convergeert $I(\varphi)$ wèl!

Existentiëstelling. Gegeven: gebied G , rand S , f op S .



Bewering

Als er bestaat op $G+S$ een functie F , zo dat

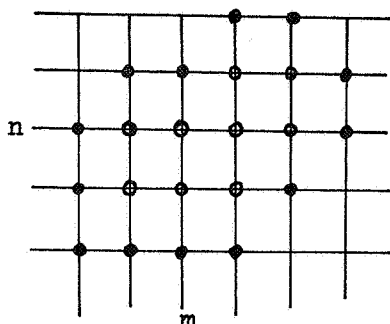
$$a) \quad I[F] = \iint_G (F_x^2 + F_y^2) \, dx \, dy < \infty,$$

$$b) \quad F = f \text{ op } S.$$

Dan bestaat er een ϕ , $\phi = 0$ op S , zo dat $I[F+\phi]$ minimaal, en $F+\phi$ is oplossing van het Dirichletprobleem.

Op het bewijs van deze stelling gaan we niet gedetailleerd in.

Analogon bij de numerieke approximatie: het relaxatieproces.



Gegeven op de randpunten (zwart) van een roosterpuntenverzameling een functie f .

Gevraagd op alle punten (wit en zwart) een functie φ te construeren zo, dat $\varphi = f$ op de zwarte punten, en $\varphi_{n,m} =$

$\frac{1}{4} (\varphi_{n+1,m} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n,m+1} + \varphi_{n,m-1})$ op de witte punten (differentie-analogon van de Laplacevergelijking, zie PD-62).

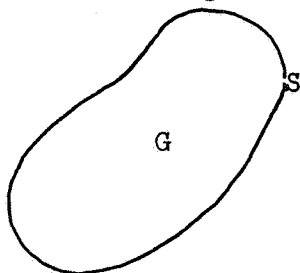
Oplossing. We beginnen met een willekeurige functie F op alle punten. Analogon van $F_x^2 + F_y^2$ in het witte punt (m,n) wordt: (symmetrisch opstellen)

$$\frac{1}{2} [(F_{m+1,n} - \alpha)^2 + (F_{m-1,n} - \alpha)^2 + (F_{m,n+1} - \alpha)^2 + (F_{m,n-1} - \alpha)^2]$$

waarbij $\alpha = F_{m,n}$.

Deze uitdrukking gaan we punt voor punt minimaliseren, door $F_{m,n} = \alpha$ te wijzigen. Differentiatie naar α levert voor de minimumwaarde precies $\alpha = \frac{1}{4} [F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1}]$. Door deze wijziging daalt de integraal (som) van $F_x^2 + F_y^2$ over het gebied (witte punten) eveneens. Herhaalde toepassing levert approximatie van de gevraagde oplossing.

Keren we terug tot de minimalisatie van I in het continue geval.



Uitgangspunt:

- Willekeurige gegeven functie F op $G+S$, $F = f$ op S , $I[F] < \infty$,
- Een aantal gegeven, onderling onafhankelijke functies $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, nul op S .

Opdracht: minimaliseer $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = I[F + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n]$ door geschikte keuze van $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Uitwerking: schrijven we $\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = I(\varphi, \varphi)$, dus

$I(\varphi, \varphi) = I[\varphi]$, dan gaat Φ over in

$$\Phi = I[F] + 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k I(F, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell I(\varphi_k, \varphi_\ell).$$

Ga dit na.

Dit is een kwadratische vorm in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, in overzichtelijker notatie samengevat als

$$\Phi = A + 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} \lambda_k \lambda_{\ell} \quad (28.4)$$

waarin $A = I[F]$, $A_k = I(F, \varphi_k)$, $A_{k\ell} = I(\varphi_k, \varphi_{\ell}) = A_{\ell k}$.

$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bereikt zijn minimale waarde, als $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} = 0$ ($k = 1, \dots, n$)

(zie toelichting a), dus wanneer

$$2 A_k + 2 \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} \lambda_{\ell} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (28.5)$$

Dit zijn n niet homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden, determinant niet nul (zie toelichting b). We vinden dus precies één oplossing.

Toelichting

- a) Een functie $\Phi(x, y)$ van twee variabelen kan onder geschikte differentieerbaarheidsvoorwaarden ontwikkeld worden in een Taylorreeks om het punt $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$. Stel daartoe $(x, y) = (x_0, y_0) + s(\underline{\ell}, m)$, waarbij $\underline{\ell} = (\ell, m)$ eenheidsvector is.

$$\Phi(x, y) = \Phi(x_0 + s\ell, y_0 + sm) = g(s).$$

$g(s)$ ontwikkelen we in een Taylorreeks om $s = 0$

$$g(s) = g(0) + \frac{1}{1!} s g'(0) + \frac{1}{2!} s^2 g''(0) + \dots$$

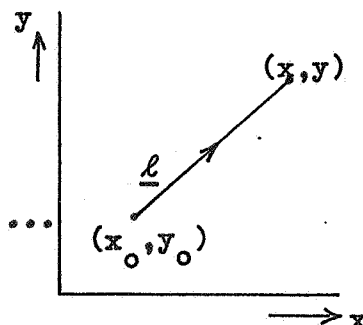
Zodoende verkrijgen we

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!} s [\Phi_x \ell + \Phi_y m](\underline{x}_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} s^2 [\Phi_{xx} \ell^2 + 2 \Phi_{xy} \ell m + \Phi_{yy} m^2](\underline{x}_0) + \dots \end{aligned}$$

Omdat $\ell s = x - x_0$, $m s = y - y_0$, wordt dit

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!} \{ (x - x_0) \Phi_x(\underline{x}_0) + (y - y_0) \Phi_y(\underline{x}_0) \} + \\ &+ \frac{1}{2!} \{ (x - x_0)^2 \Phi_{xx}(\underline{x}_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \Phi_{xy}(\underline{x}_0) + (y - y_0)^2 \Phi_{yy}(\underline{x}_0) \} + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (28.6)$$

Dit is de Taylorontwikkeling van Φ om (x_0, y_0) .



Nodig voor een minimum van Φ in (x_0, y_0) is, dat $\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0) \geq 0$ voor alle (x, y) in de buurt van (x_0, y_0) . Daarvoor moet de lineaire term van (28.6) voor alle (x, y) nul zijn (ga dit na!).

$$(x-x_0) \Phi_x(x_0) + (y-y_0) \Phi_y(x_0) = 0,$$

dus

$$\Phi_x(x_0) = \Phi_y(x_0) = 0. \quad (28.7)$$

Deze zgn. stationnariteitsvoorwaarde (28.7) geldt ook in een maximum.

Om te beoordelen of x_0 al dan niet een extreem levert, en, zo ja, wat voor extreem dit is, moeten we het kwadratische stuk van (28.6) in eerste instantie onderzoeken. Zie hiervoor bijvoorbeeld R. Courant, Differential and Integral Calculus II, p.204.

Voor $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ als funktie van n variabelen vinden we analoog met (28.6,7) voor een extreem uit de Taylorontwikkeling de stationnariteitsvoorwaarde

$$\Phi_{\lambda_1} = \Phi_{\lambda_2} = \dots = \Phi_{\lambda_n} = 0. \quad (28.8)$$

Aangezien Φ een Dirichletintegraal is, dus $\Phi \geq 0$, en voor $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ ook $\Phi \rightarrow \infty$ moet het enige stationnaire punt (zie toelichting b) wel een minimum zijn.

b) De determinant $|A_{kl}|$ is niet nul. Stel namelijk dat deze wel nul is.

Dan is er een niet triviale lineaire combinatie $\beta_1 A_{k1} + \dots + \beta_n A_{kn} = 0$ ($k = 1, \dots, n$), dus

$$I(\varphi_k, \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_n \varphi_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

waaruit door lineaire combinatie volgt

$$I[\beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_n \varphi_n] = 0.$$

Volgens PD-283 is dus $\beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_n \varphi_n = \text{constant}$ ($= 0$, omdat alle φ_k op S nul zijn), in strijd met de op PD-286 onderstelde lineaire onafhankelijkheid van $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

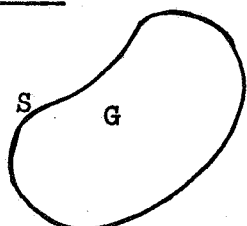
Algemene opmerkingen

- 1) De minimale waarde van de Dirichletintegraal neemt af, naarmate we meer functies φ aan het stelsel b) op PD-286 toevoegen.
- 2) In hoeverre we in staat zijn met het op de voorgaande pagina's geschetste variatieprincipe van Dirichlet de uiteindelijk beoogde functie ϕ uit de existentiestelling op PD-285 te benaderen of te verkrijgen, zal afhangen van de keuze der functies $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. De vorm van het gebied G speelt hier in de praktijk een belangrijke rol.

Generalisatie (neutronenbeweging in kernreactoren)

Gegeven: een functie $c(x,y) \geq 0$ op G , en een functie f op de rand S van G .

Gevraagd: een functie $u(x,y)$ op G , zo dat



$$\Delta u = c(x,y)u \text{ in } G, \text{ en } u = f \text{ op } S. \quad (28.9)$$

Oplossing

I. Eenduidigheid. Als $\Delta u_1 = cu_1, u_1 = f$ op S
en $\Delta u_2 = cu_2, u_2 = f$ op S .

Dan is $u_1(x,y) = u_2(x,y)$.

Bewijs. Noem $u_1 - u_2 = u$,

$$\Delta u = cu, \quad u = 0 \text{ op } S. \quad (28.10)$$

Beschouw $\iint_G \operatorname{div} (u \operatorname{grad} u) dx dy = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} ds$ (zie (12.15))

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = u \Delta u + |\operatorname{grad} u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + cu^2, \quad u = 0 \text{ op } S$$

en dus
$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2 + cu^2) dx dy = 0.$$

De integrand is niet negatief omdat $c \geq 0$, maar kan ook niet positief zijn, omdat de integraal nul is $\Rightarrow u_x^2 + u_y^2 + cu^2 = 0 \Rightarrow u_x = u_y = 0$ en daardoor $u = \text{constant} = 0$.

II. Variatieprincipe. Noem $I[u] = \iint_G (u_x^2 + u_y^2 + cu^2) dx dy$.

Als er bestaat een functie $u(x,y)$ met de eigenschap: $u = f$ op S en $I[u] \leq I[w]$ voor elke functie w met $w = f$ op S .

Dan is $\Delta u = cu$.

Bewijs. Noem $w = u + \epsilon v$. Voor elke ϵ en voor elke v die nul is op S geldt

$$\begin{aligned} I[u + v] &= \iint_G [(u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2 + c(u + \epsilon v)^2] dx dy = \\ &= I[u] + 2\epsilon \iint_G (u_x v_x + u_y v_y + uv) dx dy + \epsilon^2 I[v] \geq I[u]. \end{aligned}$$

Omdat $\epsilon^2 I[v]$ voor $\epsilon \rightarrow 0$ kwadratisch naar nul gaat en de ϵ -term lineair, dus minder snel en van positieve zowel als negatieve kant naar nul kan gaan, moet voor elke v , die nul is op S gelden

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y + cuv) dx dy = 0.$$

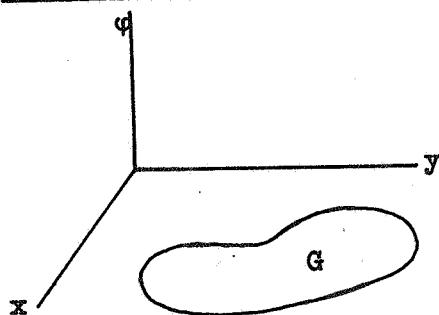
Uitgewerkt volgens (12.15)

$$\int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_G v (\Delta u - cu) dx dy = 0.$$

De eerste term is nul omdat $v = 0$ op S . Uit continuïteitsoverwegingen voor $\Delta u - cu$ en de vrije keuze-mogelijkheid van v volgt nu (zie PD-284) de betrekking $\Delta u - cu = 0$ q.e.d.

III. Opmerking. Essentiëel bij het eenduidigheidsbewijs is de conditie $c(x,y) \geq 0$. Laten we deze voorwaarde achterwege, dan voldoen er meer aan de vergelijking $\Delta u = cu$, $u = 0$ op S . Zie hiervoor het volgende hoofdstuk.

29. Eigentrillingen van een membraan



Een in het XOY vlak binnen het gebied G opgespannen membraan kan trillen in een richting loodrecht op het XOY vlak. Daarbij gehoorzaamt de uitwijking $\varphi(x,y,t)$ aan de voorwaarden

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} \\ \varphi = 0 \text{ op de rand } S \text{ van } G. \end{cases} \quad (29.1)$$

We hebben hier dus te maken met de golfvergelijking in twee dimensies onder een bepaalde randconditie. In het bijzonder interesseren we ons

nu voor zgn. staande trillingen, dwz. voor oplossingen van (29.1), die geschreven kunnen worden als $\varphi(x,y,t) = u(x,y) \phi(t)$. Invullen levert (separatie)

$$(u_{xx} + u_{yy})\phi = \frac{1}{c^2} u \phi''$$

$$\frac{u_{xx} + u_{yy}}{u} = \frac{\phi''}{\phi} = \text{constant} = -k^2$$

$$\begin{cases} \phi'' + (kc)^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi = A \sin kct + B \cos kct \\ \Delta u + k^2 u = 0, u = 0 \text{ op } S \end{cases} \quad (29.2)$$

Volgens (29.2) is de optredende trilling harmonisch. kc is de zgn. eigen(cirkel)frequentie, een bijbehorende oplossing $u(x,y)$ heet trillingsvorm, φ eigentrilling van het membraan.

Merk op, dat (29.2) van dezelfde gedaante is als (28.10) maar met negatieve functie $c(x,y)$. Zie (28.9). Het optreden van eigentrillingen in het onderhavige geval wijst op meerdere oplossingen van (29.2). Zie laatste opmerking van hoofdstuk 28.

Definieer het Rayleighquotient $R[u]$ van de functie u door

$$R[u] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy}{\iint_G u^2 dx dy} \quad (29.3)$$

Opm. Voor $u(x,y) \equiv 0$ is $R[u]$ niet gedefinieerd.

Variatieprincipe van Rayleigh

Als voor een gegeven functie u , nul op S , en voor elke andere functie w , nul op S , geldt $R[u] \leq R[w]$.
Dan voldoet u aan (29.2) met $k^2 = R[u]$. (29.4)

Bewijs. $R[u] \leq R[w]$ levert

$$\iint (u_x^2 + u_y^2) \iint w^2 \leq \iint (w_x^2 + w_y^2) \iint u^2. \quad (29.5)$$

Alle integraties worden uitgevoerd over G .

Schrijven we $w = u + \varepsilon v$, $v = 0$ op S , dan is

$$\begin{aligned} \iint w^2 &= \iint u^2 + 2\varepsilon \iint uv + \varepsilon^2 \iint v^2 \\ \iint (w_x^2 + w_y^2) &= \iint (u_x^2 + u_y^2) + 2\varepsilon \iint (u_x v_x + u_y v_y) + \varepsilon^2 \iint (v_x^2 + v_y^2). \end{aligned}$$

Volgens (12.15) ($v = 0$ op S) gaat de laatste vorm over in

$$\iint (w_x^2 + w_y^2) = \iint (u_x^2 + u_y^2) - 2\varepsilon \iint v \Delta u + \varepsilon^2 \iint (v_x^2 + v_y^2).$$

Ingevuld in (29.5) en vereenvoudigd komt er

$$\begin{aligned} \iint (u_x^2 + u_y^2) [2\varepsilon \iint uv + \varepsilon^2 \iint v^2] &\leq \\ &\leq \iint u^2 [-2\varepsilon \iint v \Delta u + \varepsilon^2 \iint (v_x^2 + v_y^2)]. \end{aligned} \quad (29.6)$$

De betrekking (29.6) moet gelden voor elke v , nul op S , en elke ε .
Conclusie: coëfficiënten van ε links en rechts gelijk. Dus

$$\begin{aligned} \iint u^2 \iint v \Delta u + \iint v u \iint (u_x^2 + u_y^2) &= 0 \\ \text{deel door } \iint u^2 & \\ \iint v \{ \Delta u + u R[u] \} &= 0 \end{aligned} \quad (29.7)$$

Voor elke v , nul op S , moet (29.7) gelden, dus

$$\Delta u + u R[u] = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Opmerking. Door de coëfficiëntenidentificatie van ε in (29.6) is gelijktijdig aan de gehele ongelijkheid (29.6) voldaan:

$$\text{Immers} \quad \varepsilon^2 \iint v^2 \iint (u_x^2 + u_y^2) \leq \varepsilon^2 \iint u^2 \iint (v_x^2 + v_y^2) \quad \text{volgens (29.5).}$$

Op het existentiebewijs van een eigentrilling bij een gegeven membraan gaan we niet in. Wel schetsen we een in toepassingen bruikbare methode ter approximatie van eigentrillingen.

Uitgangspunt. Een lineair onafhankelijke collectie functies $u_1, \dots, u_n$, alle nul op S .

Opdracht. Zoek een lineaire combinatie

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

welke het Rayleighquotient $R[u]$ (zie 29.3) minimaliseert.
(De te bepalen u heeft slechts binnen de verzameling der van $u_1, \dots, u_n$ lineair afhankelijke functies een minimale $R[u]$. Daarbuiten kan $R[u]$ best nog kleinere waarden aannemen. Vandaar de betekenis van deze methode als approximatie.)

Uitwerking. $R[u]$ verandert niet, als we u vermenigvuldigen met een reëel getal $\alpha \neq 0$. (Ga dit na!) het is dus geen beperking, als we

veronderstellen dat $\iint_G u^2 dx dy = 1$ (normeringsconditie). Uitgeschreven wordt dit

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell \iint_G u_k u_\ell dx dy = 1. \quad (29.8)$$

Hiermee gaat $R[u]$ over in

$$R[u] = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell \iint_G \left\{ (u_k)_x (u_\ell)_x + (u_k)_y (u_\ell)_y \right\} dx dy \quad (29.9)$$

We moeten dus bepalen getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zo dat (29.9) minimaal is onder de bijvoorwaarde (29.8). Algemeen principe hiervoor (Multipliatorenmethode van Lagrange) is de stelling

$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is extreem onder de nevenvoorwaarde $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, als er bestaat een getal μ (multiplicator) zo dat de functie $\Phi + \mu\Psi$ een extreem heeft op het "oppervlak" $\Psi = 0$.

(Toelichting: $\Phi + \mu\Psi$ heeft op $\Psi = 0$ dezelfde waarde als Φ zelf. Als we dus $\Phi + \mu\Psi$ door geschikte keuze van μ een extreem kunnen laten aannemen op $\Psi = 0$, dan is dit automatisch extreem voor Φ onder de bijvoorwaarde $\Psi = 0$. Voor nauwkeuriger informatie zie R.Courant, Differential and Integral Calculus II, p.190-199.)

Schrijven we ter afkorting $E_{k\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_G u_k u_\ell dx dy$,
 $A_{k\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_G \left\{ (u_k)_x (u_\ell)_x + (u_k)_y (u_\ell)_y \right\} dx dy$, dan krijgen we

$$\begin{cases} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} \lambda_k \lambda_\ell \\ \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n E_{k\ell} \lambda_k \lambda_\ell - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\Phi + \mu\Psi \text{ extreem} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\Phi + \mu\Psi) = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dit is weer de stationnariteitsvoorwaarde van PD-288. Uitgewerkt wordt dit

$$2 \sum_{\ell=1}^n (A_{k\ell} + \mu E_{k\ell}) \lambda_\ell = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (29.10)$$

veronderstellen dat $\iint_G u^2 dx dy = 1$ (normeringsconditie). Uitgeschreven wordt dit

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell \iint_G u_k u_\ell dx dy = 1. \quad (29.8)$$

Hiermee gaat $R[u]$ over in

$$R[u] = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell \iint_G \left\{ (u_k)_x (u_\ell)_x + (u_k)_y (u_\ell)_y \right\} dx dy \quad (29.9)$$

We moeten dus bepalen getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zo dat (29.9) minimaal is onder de bijvoorwaarde (29.8). Algemeen principe hiervoor (Multiplicatorenmethode van Lagrange) is de stelling

$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is extreem onder de nevenvoorwaarde $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, als er bestaat een getal μ (multiplicator) zo dat de functie $\Phi + \mu\Psi$ een extreem heeft op het "oppervlak" $\Psi = 0$.

(Toelichting: $\Phi + \mu\Psi$ heeft op $\Psi = 0$ dezelfde waarde als Φ zelf. Als we dus $\Phi + \mu\Psi$ door geschikte keuze van μ een extreem kunnen laten aannemen op $\Psi = 0$, dan is dit automatisch extreem voor Φ onder de bijvoorwaarde $\Psi = 0$. Voor nauwkeuriger informatie zie R.Courant, Differential and Integral Calculus II, p.190-199.)

Schrijven we ter afkorting $E_{k\ell} = \iint_G u_k u_\ell dx dy$,
 $A_{k\ell} = \iint_G \left\{ (u_k)_x (u_\ell)_x + (u_k)_y (u_\ell)_y \right\} dx dy$, dan krijgen we

$$\begin{cases} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} \lambda_k \lambda_\ell \\ \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n E_{k\ell} \lambda_k \lambda_\ell - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\Phi + \mu\Psi \text{ extreem} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\Phi + \mu\Psi) = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dit is weer de stationnariteitsvoorwaarde van PD-288. Uitgewerkt wordt dit

$$2 \sum_{\ell=1}^n (A_{k\ell} + \mu E_{k\ell}) \lambda_\ell = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (29.10)$$

Het stelsel (29.10) van n lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden heeft een niet triviale oplossing dan en alleen dan, als zijn coëfficiëntendeterminant nul is, m.a.w.

$$\begin{vmatrix} A_{11} + \mu E_{11} & \dots & A_{1n} + \mu E_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} + \mu E_{n1} & \dots & A_{nn} + \mu E_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (29.11)$$

een n de graadsvergelijking voor μ .

We vinden in het algemeen dus n waarden van μ , wat aanleiding kan geven tot méér dan één (lokaal) minimum van $R[u]$.

Op grond van het voorgaande is te verwachten dat (29.2) voor méér dan één k een niet triviale oplossing heeft.

Stelling (Orthogonaliteit)

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \quad u_1 = 0 \text{ op } S \\ \Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ op } S \\ k_1^2 \neq k_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_G u_1 u_2 \, dx \, dy = 0.$$

Bewijs. We berekenen $\iint_G (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) \, dx \, dy$ op twee manieren.

Volgens het gegeven krijgen we $(k_1^2 - k_2^2) \iint_G u_1 u_2 \, dx \, dy$.

Volgens (12.16) komt er $\int_S (u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \underline{n}} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \underline{n}}) \, ds = 0$ omdat u_1 en u_2 op S nul zijn. $k_1^2 - k_2^2 \neq 0$, dus $\iint_G u_1 u_2 \, dx \, dy = 0$.

Zie ook PD-189, 190.

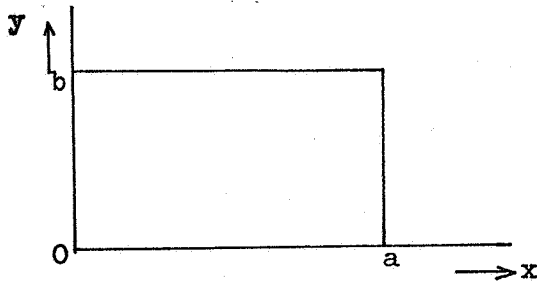
Het is mogelijk de eigenfuncties van een membraan te ordenen naar de grootte van hun eigenwaarde k^2 . Als er bij een eigenwaarde k^2 meer dan één onafhankelijke oplossing u voorkomt, spreken we van ontaarding. In het niet ontaarde geval gaan we als volgt te werk:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 < k_1 & < & k_2 & < & k_3 & < & \dots \\ u_1 & & u_2 \perp u_1 & & u_3 \perp u_2 & & \\ & & & & u_3 \perp u_1 & & \end{array}$$

$R[u_1]$ is minimaal binnen de klasse van alle functies op G ,

$R[u_2]$ is minimaal binnen de klasse van die functies, welke reeds orthogonaal met u_1 zijn. Enzovoort.

Voorbeeld. Het rechthoekige membraan: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.



Eigenfuncties zijn

$$u_{\ell m} = A \sin \frac{k_{\ell} x}{a} \sin \frac{m \pi y}{b}$$

$$(\ell, m = 1, 2, 3, \dots)$$

We zien $\Delta u_{\ell m} = -A \left(\frac{\ell^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{\ell \pi x}{a} \sin \frac{m \pi y}{b}.$

Dus
$$\begin{cases} \Delta u_{\ell m} + k_{\ell m}^2 u_{\ell m} = 0, & \text{waarbij} \\ k^2 = \pi^2 \left(\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right). \end{cases}$$

Ontaarding blijkt hier op treden, als a en b een rationale verhouding hebben. Neem bijvoorbeeld $a = b = \pi$. Dan hebben $u_{1,2} = \sin x \sin 2y$ en $u_{2,1} = \sin 2x \sin y$ dezelfde eigenwaarde $1^2 + 2^2 = 5$.

Einde van het college

(De syllabus van dit gedeelte van het college werd verzorgd door
drs K.A.Post, Technische Hogeschool Eindhoven)